第 1 回 微積：逆三角関数，極限値

2015 年 4 月 29 日

$\boxed{\mathbf{1}}$

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax-\sin bx}{x}=\lim_{x\to 0}\Big(a\cdot\frac{\sin ax}{ax}-b\cdot\frac{\sin bx}{bx}\Big)=a-b.$

(6) $y=x-\dfrac{\pi}{3}$ とおけば，$x\to\dfrac{\pi}{3}$ のとき $y\to 0$ なので，

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin(x+\frac{\pi}{6})-1}{x-\frac{\pi}{3}}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin(y+\frac{\pi}{2})-1}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{\cos y-1}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{(\cos y-1)(\cos y+1)}{y(\cos y+1)}$$
$$=\lim_{y\to 0}\frac{-\sin^2 y}{y(\cos y+1)}=\lim_{y\to 0}\left(\frac{\sin y}{y}\right)^2\frac{-y}{\cos y+1}=0.$$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x}=1$ に注意して，

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\Big(\frac{\sin x}{x}\Big)^2\frac{1}{1+\cos x}=\frac{1}{2}.$$

【別法】(6), (7) では $1-\cos x=2\sin^2(x/2)$ を用いる方法も有効.

(8) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$ に注意して，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(\sin x)}{\tan x}=\lim_{x\to 0}\Big(\frac{\tan(\sin x)}{\sin x}\cdot\cos x\Big)=\lim_{y\to 0}\frac{\tan y}{y}\cdot\lim_{x\to 0}\cos x=1.\quad (y=\sin x\text{ とおいた})$$

(9) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{(\log a)x}-1}{(\log a)x}\cdot\log a=\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}\cdot\log a=\log a$ （$y=(\log a)x$ とおいた）なので，

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{3^x-2^x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{3^x-1}{x}-\frac{2^x-1}{x}}=\frac{1}{\log 3-\log 2}\Big(=\frac{1}{\log(3/2)}\Big).$ **【別法】**$\displaystyle\frac{x}{3^x-2^x}=\frac{1}{2^x}\frac{x}{(3/2)^x-1}.$

(11) $y=\dfrac{\pi}{2}-x$ とおけば $x\to\dfrac{\pi}{2}-0$ のとき $y\to+0$ であるから，

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\Big(\frac{\pi}{2}-x\Big)\tan x=\lim_{y\to+0}y\tan\Big(\frac{\pi}{2}-y\Big)=\lim_{y\to+0}\frac{y}{\tan y}=1.$$

(12) 自然対数をとって考える．$\displaystyle\lim_{x\to 1}\log(x^{\frac{1}{1-x}})=-\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{x-1}=-\lim_{y\to 0}\frac{\log(1+y)}{y}=-1$ （$y=x-1$ とおいた）．$x^{\frac{1}{1-x}}=e^{\log(x^{\frac{1}{1-x}})}$ であるから，$\displaystyle\lim_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}=e^{\lim_{x\to 1}\log(x^{\frac{1}{1-x}})}=e^{-1}\Big(=\frac{1}{e}\Big).$

(13) 自然対数をとって考える．$\displaystyle\log(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\frac{\log(\cos x)}{x^2}=\frac{\log(\cos x)}{\cos x-1}\frac{\cos x-1}{x^2}$ であるから，(7), (12) の計算を用いて，

$$\lim_{x\to 0}\log(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos x)}{x^2}=\lim_{y\to 1}\frac{\log y}{y-1}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=-\frac{1}{2}\quad(y=\cos x\text{ とおいた})$$

よって，(12) と同様に，$\displaystyle\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\lim_{x\to 0}\log(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}}=e^{-\frac{1}{2}}\Big(=\frac{1}{\sqrt{e}}\Big).$

【注意】一般に，$b=\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)$ が存在し，$g(y)$ が b で連続なら，$\displaystyle\lim_{x\to a}g(f(x))=g(\lim_{x\to a}f(x))=g(b)$ が成り立つ（連続性の定義にほかならない）．(12), (13) の解答例ではこの事実（e^x の連続性）を用いている．

$\boxed{\mathbf{2}}$

(1) $\theta=\mathrm{Sin}^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ とおけば，$\sin\theta=-\dfrac{1}{2}\ \left(-\dfrac{\pi}{2}\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{2}\right)$ であるから $\theta=-\dfrac{\pi}{6}$.

(2) $\theta=\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ とおけば，$\tan\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ であるから $\theta=\dfrac{\pi}{6}$.

(3) $\theta=\mathrm{Sin}^{-1}\left(\sin\dfrac{3\pi}{5}\right)$ とおけば，$\sin\theta=\sin\dfrac{3\pi}{5}\ \left(-\dfrac{\pi}{2}\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{2}\right)$ であるから $\theta=\pi-\dfrac{3\pi}{5}=\dfrac{2\pi}{5}$.

(4) $\theta=\mathrm{Tan}^{-1}\left(\tan\dfrac{4\pi}{7}\right)$ とおけば，$\tan\theta=\tan\dfrac{4\pi}{7}\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ であるから $\theta=\dfrac{4\pi}{7}-\pi=-\dfrac{3\pi}{7}$.

(5) $\alpha=\mathrm{Tan}^{-1}(-2)$ とおけば，$\tan\alpha=-2\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ で，$\sin\bigl(\mathrm{Tan}^{-1}(-2)\bigr)=\sin\alpha$. このとき，$\dfrac{1}{\cos^2\alpha}=1+\tan^2\alpha=5$ より $\cos^2\alpha=\dfrac{1}{5}$ となり，$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=\dfrac{4}{5}$. $\tan\alpha<0$ より $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<0$ となるので, $\sin\alpha<0$ となり，求める値は $\sin\alpha=-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

【別法】 $\cos\alpha>0$ より $\cos^2\alpha=\dfrac{1}{5}$ を用いて $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\sin\alpha=\tan\alpha\cos\alpha=-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

(6) $\alpha=\mathrm{Cos}^{-1}\left(-\dfrac{1}{3}\right)$ とおけば，$\cos\alpha=-\dfrac{1}{3}\ (0\leq\alpha\leq\pi)$ で，$\tan\left(\mathrm{Cos}^{-1}\left(-\dfrac{1}{3}\right)\right)=\tan\alpha$. このとき，$1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}=9$ より $\tan^2\alpha=8$. $\cos\alpha<0$ より $\dfrac{\pi}{2}<\alpha\leq\pi$ となるので，$\tan\alpha<0$ となり，求める値は $\tan\alpha=-2\sqrt{2}$.

【別法】 $\sin\alpha\geq 0$ より $\cos\alpha=-\dfrac{1}{3}$ を用いて $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-2\sqrt{2}$.

$\boxed{\mathbf{3}}$

(1) $x=\cos\bigl(\mathrm{Tan}^{-1}2\bigr)$ と変形できる．ここで $\alpha=\mathrm{Tan}^{-1}2$ とおけば，$\tan\alpha=2\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$. $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}=1+\tan^2\alpha=5$ より $\cos^2\alpha=\dfrac{1}{5}$. $\cos\alpha>0$ に注意して，$x=\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

(2) $x=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-2\,\mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{1}{4}\right)=\cos\left(2\,\mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{1}{4}\right)$ と変形できる．ここで $\alpha=\mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{1}{4}$ とおけば，$\sin\alpha=\dfrac{1}{4}\ \left(-\dfrac{\pi}{2}\leq\alpha\leq\dfrac{\pi}{2}\right)$ であるから，$x=\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=\dfrac{7}{8}$.

(3) $x=\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-2\,\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{3}\right)$ と変形できる．$\alpha=\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{3}$ とおけば，$\tan\alpha=\dfrac{1}{3}\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$. このとき，$x=\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-2\alpha\right)=\dfrac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan 2\alpha}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan 2\alpha}=\dfrac{1-\tan 2\alpha}{1+\tan 2\alpha}$. また，$\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\dfrac{3}{4}$. よって, $x=\dfrac{1-\frac{3}{4}}{1+\frac{3}{4}}=\dfrac{1}{7}$.

$\boxed{\mathbf{4}}$ $\theta=\mathrm{Tan}^{-1}x$ とおけば，$\tan\theta=x\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ で，$\sin(\mathrm{Tan}^{-1}x)=\sin\theta$. このとき，$\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta=1+x^2$ より $\cos^2\theta=\dfrac{1}{1+x^2}$，$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=\dfrac{x^2}{1+x^2}$. $\tan\theta,\sin\theta$ が同符号 (0 になる場合も同時) であることに注意して, $\sin\theta=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ が得られる (これが示すべき式).

【別法】 $\cos\theta>0$ より $\cos^2\theta=\dfrac{1}{1+x^2}$ を用いて $\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$，$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.