数学演習第一（第２回）２０１５年５月１３日実施分　解答例

$\boxed{1}$ (1) $2(x-1)+3(y-2)+4(z+1)=0$ より，$2x+3y+4z=4$ が答え.

(2) $x-(y-1)+3(z-2)=0$ より，$x-y+3z=5$ が答え.

$\boxed{2}$ (1) ベクトル $(2,3,-1)$ は $H: 2x+3y-z+4=0$ の一つの法線ベクトル.
よって，x 座標が正の単位法線ベクトル $\boldsymbol{e}=\frac{1}{\sqrt{14}}(2,3,-1)$.

(2) 原点を通り，H に直交する直線を L とする．L 上の点には，その原点からの位置ベクトル $t\boldsymbol{e}$ を用いて，座標 t をふることができる．このとき，空間内の点 $\mathrm{P}(x,y,z)$ が平面 H 上にあるということは，P の（原点からの）位置ベクトル $\boldsymbol{x}=(x,y,z)$ が，方程式 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{e}=-\dfrac{4}{\sqrt{2^2+3^2+(-1)^2}}\left(=-\dfrac{4}{\sqrt{14}}\right)$ をみたすということで，このことは，点 $\mathrm{P}(x,y,z)$ から L に下した垂線の足の座標が $-\dfrac{4}{\sqrt{14}}$ になるということに他ならない．故に，直線 L に下した垂線の足の（$\boldsymbol{e}$ で測った）座標が $-\dfrac{4}{\sqrt{14}}$ となる点全体の集合が平面 H である.

$\boxed{3}$ (1) $A+B=\begin{bmatrix}1&-1\\2&3\\-1&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&3\\-1&1\\0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&2\\1&4\\-1&2\end{bmatrix}$, $A-B=\begin{bmatrix}1&-1\\2&3\\-1&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2&3\\-1&1\\0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&-4\\3&2\\-1&-2\end{bmatrix}$

$$3A+2B=3\begin{bmatrix}1&-1\\2&3\\-1&0\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}2&3\\-1&1\\0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-3\\6&9\\-3&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4&6\\-2&2\\0&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&3\\4&11\\-3&4\end{bmatrix}$$

(2) $A+B$ および $A-B$ については，演習書の解答参照.

$$3A+2B=3\begin{bmatrix}1&4\\2&7\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}3&6\\5&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&12\\6&21\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6&12\\10&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9&24\\16&29\end{bmatrix}$$

$\boxed{4}$

(1) $AB=\begin{bmatrix}1&-1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}=1\cdot2+(-1)\cdot1+3\cdot(-1)=-2$

(2) $AB=\begin{bmatrix}1&-1&3\\2&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\4\end{bmatrix}$

(3) $AB=\begin{bmatrix}1&-1&3\\2&1&1\\-1&2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\4\\-2\end{bmatrix}$　(4) $AB=\begin{bmatrix}1&-1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\1&1\\-1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&5\end{bmatrix}$

(5) $AB=\begin{bmatrix}1&-1&3\\2&1&1\\-1&2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\1&1\\-1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&5\\4&3\\-2&6\end{bmatrix}$

(6) $AB=\begin{bmatrix}1&-1&3\\2&1&1\\-1&2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0&1\\1&1&1\\-1&2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&5&3\\4&3&4\\-2&6&3\end{bmatrix}$

$\boxed{5}$ 演習書の解答参照

$\boxed{6}$ ${}^tA=\begin{bmatrix}1&2\\4&7\end{bmatrix}$, ${}^tB=\begin{bmatrix}3&5\\6&4\end{bmatrix}$, ${}^t(AB)=\begin{bmatrix}23&41\\22&40\end{bmatrix}={}^tB\,{}^tA$,　${}^tA\,{}^tB=\begin{bmatrix}15&13\\54&48\end{bmatrix}$

$\boxed{7}$ (1) 演習書問題 8.1.1 (1) の A, B がその一例

(2) $B=\begin{bmatrix}1&1\\-1&-1\end{bmatrix}$ がその一例．他の例としては，$\begin{bmatrix}1&2\\-1&-2\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}-1&2\\1&-2\end{bmatrix}$ などがある.

(3) $B=\begin{bmatrix}2&-1\\2&-1\end{bmatrix}$ がその一例．他の例としては，$\begin{bmatrix}2&-1\\6&-3\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}-2&1\\6&-3\end{bmatrix}$ などがある.

($AB=\mathrm{O}$, $A\neq\mathrm{O}$, $B\neq\mathrm{O}$ となるとき，A, B の特徴は何で，A の (B の) どういう特徴が B に (A に) 反映しているのか？　今後，線形代数を勉強しながら，考え続けるとよいかと思います．)

$\boxed{8}$ (1) $A\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}0\\8\\8\end{bmatrix}=8\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}=8\boldsymbol{v}_1$ より，$\lambda_1=8$．$A\boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}-4\\8\\0\end{bmatrix}=4\begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix}=4\boldsymbol{v}_2$ より，$\lambda_2=4$.

$A\boldsymbol{v}_3=\begin{bmatrix}-2\\-1\\0\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}=-\boldsymbol{v}_3$ より，$\lambda_3=-1$.

(2) $A\boldsymbol{v}_1=8\boldsymbol{v}_1+0\boldsymbol{v}_2+0\boldsymbol{v}_3=[\boldsymbol{v}_1\quad\boldsymbol{v}_2\quad\boldsymbol{v}_3]\begin{bmatrix}8\\0\\0\end{bmatrix}$．$A\boldsymbol{v}_2=0\boldsymbol{v}_1+4\boldsymbol{v}_2+0\boldsymbol{v}_3=[\boldsymbol{v}_1\quad\boldsymbol{v}_2\quad\boldsymbol{v}_3]\begin{bmatrix}0\\4\\0\end{bmatrix}$.

$A\boldsymbol{v}_3=0\boldsymbol{v}_1+0\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_3=[\boldsymbol{v}_1\quad\boldsymbol{v}_2\quad\boldsymbol{v}_3]\begin{bmatrix}0\\0\\-1\end{bmatrix}$．よって，

$$AB=A[\boldsymbol{v}_1\quad\boldsymbol{v}_2\quad\boldsymbol{v}_3]=[A\boldsymbol{v}_1\quad A\boldsymbol{v}_2\quad A\boldsymbol{v}_3]=[\boldsymbol{v}_1\quad\boldsymbol{v}_2\quad\boldsymbol{v}_3]\begin{bmatrix}8&0&0\\0&4&0\\0&0&-1\end{bmatrix}=B\begin{bmatrix}8&0&0\\0&4&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

より，C として，$\begin{bmatrix}8&0&0\\0&4&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$ がとれる．（実は，いまの場合，このような C はこれのみ.）

$\boxed{9}$ (1) 0　(2) $E_{i,l}$

(3) 積 $HE_{i,j}$ での i, j は固定された特別なものである．$H=\sum_{i=1}^{n}h_iE_{i,i}$ をそのまま代入すると，一つの式のなかの同じ記号 i が場所によって別のものを表すことになってしまっておかしいので，$H=\sum_{k=1}^{n}h_kE_{k,k}$ と記号を変えて計算する．$HE_{i,j}=\sum_{k=1}^{n}h_kE_{k,k}E_{i,j}$．ここで, k が 1 から n を動くとき, (1) より，k が i と等しくないなら $E_{k,k}E_{i,j}=0$ なので，$\sum_{k=1}^{n}h_kE_{k,k}E_{i,j}=\sum_{k=i}h_kE_{k,k}E_{i,j}=h_iE_{i,i}E_{i,j}$.
(2) より，$E_{i,i}E_{i,j}=E_{i,j}$ だから $h_iE_{i,i}E_{i,j}=h_iE_{i,j}$．以上まとめて，$HE_{i,j}=h_iE_{i,j}$

(4) $E_{i,j}H=E_{i,j}\sum_{k=1}^{n}h_kE_{k,k}=\sum_{k=1}^{n}h_kE_{i,j}E_{k,k}=\sum_{k=j}h_kE_{i,j}E_{k,k}=h_jE_{i,j}E_{j,j}=h_jE_{i,j}$.
故に，$HE_{i,j}-E_{i,j}H=h_iE_{i,j}-h_jE_{i,j}=(h_i-h_j)E_{i,j}$.