数学演習第一

第 2 回　平面の方程式，行列の演算

2015 年 5 月 13 日

1 次の平面の方程式を求めよ．

(1) $(2,3,4)$ を法線ベクトルとし，点 $(1,2,-1)$ を通る平面

(2) $(1,-1,3)$ を法線ベクトルとし，点 $(0,1,2)$ を通る平面

2 平面 $H: 2x+3y-z+4=0$ に関する以下の問いに答えよ．

(1) x 座標が正となる，H の単位法線ベクトル $\boldsymbol{e}$ を求めよ．

(2) 空間内の点 $P(x,y,z)$ の原点 O に関する位置ベクトルを $\boldsymbol{x}=(x,y,z)$ とするとき，平面 H の方程式 $2x+3y-z+4=0$ は，内積 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{e} = -\dfrac{4}{\sqrt{2^2+3^2+(-1)^2}}$ と変形できる．(内積の幾何学的表式を思い出し，) この式から，平面 H の幾何学的特徴を説明せよ．

3 次の行列 A, B に対し，和 $A+B$, 差 $A-B$, および $3A+2B$ を求めよ．

(1) $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$

(2) (演習書) 問題 8.1.1 (1) の行列 A, B

4 次の行列 A, B に対し，積 AB を求めよ．

(1) $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2\\ 1\\ -1\end{bmatrix}$　　(2) $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 1 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2\\ 1\\ -1\end{bmatrix}$

(3) $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2\\ 1\\ -1\end{bmatrix}$　　(4) $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$

(5) $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$　　(6) $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 1\end{bmatrix}$

5 (演習書) 問題 8.1.1 (1), (2), (3), (4) の行列 A, B に対し，AB および BA はどうなるかを示せ．

6 (演習書) 問題 8.1.1 (1) の行列 A, B に対し，転置行列 ${}^tA$, ${}^tB$, ${}^t(AB)$ を求め，積 ${}^tB\,{}^tA$ と ${}^tA\,{}^tB$ を求めよ．

7 (1) A, B を 2 次の正方行列とするとき，$AB \neq BA$ となる，A と B の例を挙げよ．

(2) $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}$ とする．$AB=\mathrm{O}$ となる，O でない 2 次の正方行列 B の例を挙げよ．

(3) $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}$ とする．$BA=\mathrm{O}$ となる，O でない 2 次の正方行列 B の例を挙げよ．

8 $A=\begin{bmatrix}0 & -2 & 2\\ -2 & 3 & 5\\ 0 & 0 & 8\end{bmatrix}$ とし，$\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}-1\\ 2\\ 0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{v}_3=\begin{bmatrix}2\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) $A\boldsymbol{v}_1=\lambda_1\boldsymbol{v}_1$, $A\boldsymbol{v}_2=\lambda_2\boldsymbol{v}_2$, $A\boldsymbol{v}_3=\lambda_3\boldsymbol{v}_3$ となる実数 λ_1, λ_2, λ_3 を求めよ．

(2) 3 次の正方行列 B が $B=\begin{bmatrix}\boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3\end{bmatrix}$ と列ベクトル分割によって与えられているとする．このとき，$AB=BC$ となる 3 次正方行列 C を（ひとつ）答えよ．

9 $E_{i,j}$ を (i,j) 成分のみが 1 で他の成分は 0 の n 次正方行列とし，$H=\displaystyle\sum_{i=1}^{n} h_i E_{i,i}$ とする．

(1) $j \neq k$ のとき，積 $E_{i,j}E_{k,l}$ を求めよ．

(2) 積 $E_{i,j}E_{j,l}$ を求めよ．

(3) 積 $HE_{i,j}$ を求めよ．

(4) $HE_{i,j}-E_{i,j}H$ を求めよ．