数学演習第一 第3回 微積：合成関数の微分, 逆関数の微分等【解答例】

演習実施日 2015 年 5 月 20 日 (水), 解答配布日 5 月 27 日 (水)

1 **(1)** 与式の分子は分母で割り切ることができる. $\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
であるから, $(\text{与式})' = (x+\sqrt{x}+1)' = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

(2)* 与式を $f(x)$ とおくと, $\log|f(x)| = \log|x+1| + 3\log|x-1| - 3\log|x| - \log|x-2|$ となる.
対数微分の公式 $(\log|f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$ を用いると, 両辺を x で微分した式は
$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x+1} + \frac{3}{x-1} - \frac{3}{x} - \frac{1}{x-2}$ となる. ゆえに $f'(x) = f(x)\frac{-6}{(x+1)x(x-1)(x-2)} = -\frac{6(x-1)^2}{x^4(x-2)^2}$.

(3) 対数の定義より $a^{\log_a b} = b$ であるから, 与式は定数 e となる. $(\text{与式})' = e' = 0$.

(4) 指数法則より, 与式は 2^{3x} となる. 公式 $(a^x)' = a^x \log a$ と合成関数の微分の公式を用いると,
$\left(2^{3x}\right)' = (2^{3x}\log 2)(3x)' = (3\log 2)2^{3x}$.

(5)* $\left\{2^{(x^3)}\right\}' = \left\{2^{(x^3)}\log 2\right\}\left(x^3\right)' = (3\log 2)x^2 2^{x^3}$. **注意** $2^{x^3} = 2^{(x^3)}$ である. $(2^x)^3$ ではない.

(6)* 与式を $f(x)$ とおくと, $\log|f(x)| = (\sin x)\log|x^3+1|$ となる. 両辺を x で微分して,
$\frac{f'(x)}{f(x)} = (\sin x)\frac{(x^3+1)'}{x^3+1} + (\cos x)\log|x^3+1|$. よって, $f'(x)$ は,
$f(x)\left\{\sin x\frac{3x^2}{x^3+1} + (\cos x)\log\left|x^3+1\right|\right\} = |x^3+1|^{\sin x}\left\{\sin x\frac{3x^2}{x^3+1} + (\cos x)\log\left|x^3+1\right|\right\}$.

補足 $\left(f(x)^{g(x)}\right)'$ は $(f(x)^a)' = a\left(f(x)\right)^{a-1}f'(x)$ の a を $g(x)$ に置き換えた式 $g(x)\left(f(x)\right)^{g(x)-1}f'(x)$ と, $\left(b^{g(x)}\right)' = \left(b^{g(x)}\log b\right)g'(x)$ の b を $f(x)$ に置き換えた式 $\left(f(x)^{g(x)}\log f(x)\right)g'(x)$ の和になる.

(7) 対数微分の公式より $(\text{与式})' = -\frac{(\cos x)'}{\cos x} = -\frac{-\sin x}{\cos x} = \tan x$.

(8)* $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ であることに注意すると, 与式は $\frac{1}{2}\log\frac{1-\sin x}{1+\sin x} = \frac{1}{2}\left\{\log(1-\sin x) - \log(1+\sin x)\right\}$.
よって, $(\text{与式})' = \frac{1}{2}\left(\frac{-\cos x}{1-\sin x} - \frac{\cos x}{1+\sin x}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{-2\cos x}{(1-\sin x)(1+\sin x)} = \frac{-\cos x}{1-\sin^2 x} = -\frac{1}{\cos x}$.

(9) 対数微分の公式より $(\text{与式})' = \frac{1}{\tan\frac{x}{2}}\cdot\left(\tan\frac{x}{2}\right)' = \frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\left(\frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{1}{\sin x}$.

2 **例の別解** $x = f(y)$ の両辺に $2e^y$ をかけて, $2xe^y = (e^y)^2 - 1 \Longleftrightarrow 0 = (e^y)^2 - 2xe^y - 1$.
2 次方程式の解の公式より $e^y = x \pm \sqrt{x^2+1}$. $e^y > 0$ より $e^y = x + \sqrt{x^2+1} \Longleftrightarrow y = \log(x+\sqrt{x^2+1})$.
対数微分の公式より $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

公式 $$\left(\log\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+A}}.$$

(10) $\frac{\pi}{2} < y < \frac{3\pi}{2}$ のとき. $\cos y < 0$ であるから, $\frac{d}{dy}\sin y = \cos y = -\sqrt{1-\sin^2 y} = -\sqrt{1-x^2}$.
したがって, $x = \sin y$ の両辺を x で微分すると, 合成関数の微分の公式より
$1 = \frac{d}{dy}\sin y\cdot\frac{dy}{dx} = -\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{dy}{dx}$ となる. よって, $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(11)* $\frac{\pi}{2} < y < \pi$ のとき. $x = \frac{1}{\cos y} < 0$ であるから, $\sqrt{x^2} = |x| = -x$. また $\sin y > 0$ より,
$\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\cos y}\right) = \frac{\sin y}{\cos^2 y} = \frac{\sqrt{1-\cos^2 y}}{\cos^2 y} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot x^2 = \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}\cdot x^2 = \frac{\sqrt{x^2-1}}{-x}\cdot x^2 = -x\sqrt{x^2-1}$.
したがって, $x = \frac{1}{\cos y}$ の両辺を x で微分すると, 合成関数の微分の公式より
$1 = \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\cos y}\right)\frac{dy}{dx} = -x\sqrt{x^2-1}\cdot\frac{dy}{dx}$ となる. よって, $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

(12)* $y < 0$ のとき $x = \sinh y < 0$ であるから, $\frac{d}{dy}\cosh y = \sinh y = -\sqrt{\cosh^2 y - 1} = -\sqrt{x^2-1}$.
したがって, $x = \cosh y$ の両辺を x で微分すると, 合成関数の微分の公式より

$1 = \dfrac{d}{dy}\cosh y \cdot \dfrac{dy}{dx} = -\sqrt{x^2-1}\cdot\dfrac{dy}{dx}$ となる．よって，$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

別解　例の別解と同様にして，$0 = (e^y)^2 - 2xe^y + 1 \iff e^y = x \pm \sqrt{x^2-1}$. $y \leqq 0$ より $e^y \leqq 1$ であるから，$e^y = x - \sqrt{x^2-1} \iff y = \log(x - \sqrt{x^2-1})$. 対数微分の公式より $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

(13)　$\dfrac{d}{dy}\tanh y = 1 - \tanh^2 y = 1 - x^2$. したがって，$x = \tanh y$ の両辺を x で微分すると，合成関数の微分の公式より $1 = \dfrac{d}{dy}\tanh y \cdot \dfrac{dy}{dx} = (1-x^2)\cdot\dfrac{dy}{dx}$ となる．ゆえに $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{1-x^2}$.

別解　例の別解と同様にして，$e^{2y} = \dfrac{1+x}{1-x} \iff y = \dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+x}{1-x} = \dfrac{1}{2}\{\log(1+x) - \log(1-x)\}$.

よって，$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{1+x} - \dfrac{-1}{1-x}\right\} = \dfrac{1}{1-x^2}$.

3　**(14)***　(与式)$' = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - 2\dfrac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1+x}{(1+x)\sqrt{x}} - \dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{x}}{1+x}$.

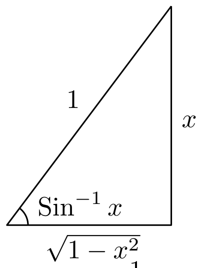
(15)*　$\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{2}$ のとき．$\cos x < 0$ であるから，$\sqrt{\cos^2 x} = |\cos x| = -\cos x$. よって，

(与式)$' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}(\sin x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{\cos^2 x}}\cos x = -\dfrac{1}{-\cos x}\cos x = 1$.

(16)*　(与式)$' = \dfrac{1}{\{\cos(\mathrm{Sin}^{-1}x)\}^2}\left(\mathrm{Sin}^{-1}x\right)' = \dfrac{1}{1-\{\sin(\mathrm{Sin}^{-1}x)\}^2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

別解　右図より $\tan\left(\mathrm{Sin}^{-1}x\right) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ であるから，商の微分の公式より，

$$(\text{与式})' = \frac{1\sqrt{1-x^2} - x\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2} = \frac{\dfrac{(1-x^2)+x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$



補足　少し一般化すると $\left(\dfrac{x}{a\sqrt[n]{a-x^n}}\right)' = \dfrac{1}{(a-x^n)\sqrt[n]{a-x^n}}$ となる．

(17)　(与式)$' = \dfrac{1}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}(2x-1)' + 2\dfrac{-1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{4x-4x^2}}2 + 2\dfrac{-1}{\sqrt{1-x}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{1-x}\sqrt{x}} = 0$.

補足　このことから，与式は定義域 $0 < x < 1$ 内で定数とわかる．$x = \dfrac{1}{2}$ を代入して，(与式) $= \dfrac{\pi}{2}$.

4　**(18)**　与式の両辺を x で微分して $1 - 3y^2y' - 2y' = 0$. よって，$y' = \dfrac{1}{3y^2+2}$ を得る．

$x = 1$ のとき $y = 0$ であるから，これを代入して $y' = \dfrac{1}{2}$.

(19)　与式の両辺を x で微分して，$2y + 2xy' - 6y^2y' = 0$. よって，$y' = \dfrac{2y}{6y^2-2x}$ を得る．

$x = \dfrac{1}{2}$ のとき $y = 1$ であるから，これらを代入して $y' = \dfrac{2}{5}$.

(20)*　与式の両辺を x で微分して，$1 - (-\sin y)y' = 0$. よって，$y' = -\dfrac{1}{\sin y}$ …① を得る．

$x = -\dfrac{1}{2}$ のとき $y = \dfrac{4\pi}{3}$ であるから，これを代入して $y' = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

別解　(① に続いて)　$\pi < y < 2\pi$ で $\sin y < 0$ であるから，

$y' = -\dfrac{1}{-\sqrt{1-\cos^2 y}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. これに $x = -\dfrac{1}{2}$ を代入して，$y' = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

(21)　与式の両辺を x で微分して，$\sin y + x(\cos y)y' = 0$. よって，$y' = -\dfrac{\sin y}{x\cos y}$ …② を得る．

$x = -2$ のとき $y = -\dfrac{\pi}{6}$ であるから，これらを代入して $y' = -\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$.

別解　(② に続いて)　$-\dfrac{\pi}{2} < y < 0$ で $x < 0$ であるから，$x\cos y = x\sqrt{1-\sin^2 y} = x\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}$

$= x\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2}} = x\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2}} = x\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{|x|} = x\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{-x} = -\sqrt{x^2-1}$ となる．よって，

$y' = -\dfrac{\frac{1}{x}}{-\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ を得る．$x = -2$ を代入して，$y' = -\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$.

5　省略.