数学演習第一 (演習 第3回) 微積：合成関数の微分, 逆関数の微分等

2015 年 5 月 20 日 (水) 実施

今回の演習では, 主として, 対数微分の公式の応用や三角関数・双曲線関数の逆関数の微分の計算を行う. まず $*$ の 10 問を解き, 次に残りの $\boxed{1}$〜$\boxed{4}$ の 11 問を解け. 時間が余ったら $\boxed{5}$ の 6 問も解け.

関数の定義域は, 特に指定のない限り, 微分可能な最大範囲とする.

$\boxed{\textbf{1}}$ 次の関数の導関数を 整理された形で 求めよ.

(1) $\dfrac{1+x+x^2}{1-\sqrt{x}+x}$ **(2)*** $\dfrac{(x+1)(x-1)^3}{x^3(x-2)}$ **(3)** $x^{\log_x e}$

(4) $(2^x)^3$ **(5)*** 2^{x^3} **(6)*** $|x^3+1|^{\sin x}$

(7) $-\log|\cos x|$ **(8)*** $\log\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$ **(9)** $\log\left|\tan\dfrac{x}{2}\right|.$

$\boxed{\textbf{2}}$ X, Y を集合とする. 関数 $f: Y \to X$ が式 $x = f(y)$ で与えられているとき, その逆関数 $f^{-1}: X \to Y$ の式 $y = f^{-1}(x)$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を以下の場合に求めよ. 次の例題を参照せよ.

> **例題** $x = f(y) = \sinh y = \dfrac{e^y - e^{-y}}{2}$ のとき.
> $\dfrac{d}{dy}(\sinh y) = \cosh y = \sqrt{1+\sinh^2 y} = \sqrt{1+x^2}$ である. よって $x = \sinh y$ の両辺を x で微分すると, 合成関数の微分の公式より $1 = \dfrac{d}{dy}(\sinh y)\cdot\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{1+x^2}\cdot\dfrac{dy}{dx}$ となる. $\therefore\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$

(10) $f(y) = \sin y \quad \left(\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{3\pi}{2}\right)$ **(11)*** $f(y) = \dfrac{1}{\cos y} \quad \left(\dfrac{\pi}{2} < y < \pi\right)$

(12)* $f(y) = \cosh y = \dfrac{e^y + e^{-y}}{2} \quad (y < 0)$ **(13)** $f(y) = \tanh y = \dfrac{\sinh y}{\cosh y} = \dfrac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}$

$\boxed{\textbf{3}}$ 次の関数の導関数を 整理された形で 求めよ.

(14)* $2\sqrt{x} - 2\,\mathrm{Tan}^{-1}\sqrt{x}$ **(15)*** $\mathrm{Cos}^{-1}(\sin x) \quad \left(\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{2}\right)$

(16)* $\tan\left(\mathrm{Sin}^{-1} x\right)$ **(17)** $\mathrm{Sin}^{-1}(2x-1) + 2\,\mathrm{Cos}^{-1}\sqrt{x}$

$\boxed{\textbf{4}}$ 以下の 4 つの曲線の指定された点 (x, y) における微分係数 y' を以下の場合に求めよ.

(18) $x - y^3 - 2y - 1 = 0, \quad (x = 1).$ **(19)** $2xy - 2y^3 + 1 = 0, \quad \left(x = \dfrac{1}{2}\right).$

(20)* $x - \cos y = 0, \quad \left(x = -\dfrac{1}{2},\ \pi < y < 2\pi\right).$ **(21)** $x\sin y - 1 = 0 \quad \left(x = -2,\ -\dfrac{\pi}{2} < y < 0\right).$

$\boxed{\textbf{5}}$ (補充問題)

x は変数, a, b は定数とする. 左辺を計算すると魔法のように式が整理され, 右辺になることを体感せよ.

(22) $\left\{2\sqrt{x} - 2a\log\left(a+\sqrt{x}\right)\right\}' = \dfrac{1}{a+\sqrt{x}}$

(23) $\dfrac{1}{2}\left\{x\sqrt{x^2+a} + a\log\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|\right\}' = \sqrt{x^2+a}.$

(24) $\left\{\sqrt{x-a}\sqrt{x-b} - (b-a)\log\left(\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}\right)\right\}' = \sqrt{\dfrac{x-b}{x-a}}.$

注意 特に $a = 0, b = -1$ のとき, $\left\{\sqrt{x+x^2} + \log\left(\sqrt{x}+\sqrt{1+x}\right)\right\}' = \sqrt{1+\dfrac{1}{x}}$ となる.

(25) $\left\{\sqrt{x-a}\sqrt{b-x} - (b-a)\mathrm{Tan}^{-1}\sqrt{\dfrac{b-x}{x-a}}\right\}' = \sqrt{\dfrac{b-x}{x-a}}.$

注意 特に $a = 0, b = 1$ のとき, $\left\{\sqrt{x-x^2} - \mathrm{Tan}^{-1}\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}\right\}' = \sqrt{\dfrac{1}{x} - 1}$ となる.

(26) $\left\{\dfrac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{x}{|a|}\right)\right\}' = \sqrt{a^2-x^2}.$

(27) $\left\{\dfrac{1}{2a^2}\left(\dfrac{x}{a^2+x^2} + \dfrac{1}{a}\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{x}{a}\right)\right\}' = \dfrac{1}{(a^2+x^2)^2}.$