第 4 回 線形：行列の基本変形, 簡約行列, 行列の階数

2015 年 5 月 27 日

$\boxed{1}$ (1) 主成分が行方向に見て左から右に並んでいない． 簡約行列は 1 行目と 2 行目を交換して $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(2) 1 行目と 2 行目の主成分が 1 でない. 簡約行列は 1 行目と 2 行目を $\frac{1}{2}$ 倍して $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 5/2 \end{bmatrix}$.

(3) 2 行目の主成分があるべき列 (第 3 列) と同じ列に 0 でない成分がある. 簡約行列は 1 行目に 2 行目の 2 倍, 3 行目に 2 行目の -1 倍を加えて $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

$\boxed{2}$

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{①}\leftrightarrow\text{②}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{③}-7\times\text{①}]{\text{②}-4\times\text{①}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{6}\times\text{③}]{-\frac{1}{3}\times\text{②}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{③}-\text{②}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{①}-2\times\text{②}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\boxed{3}$ 簡約行列の主成分を囲んで示しておく. 主成分の個数が階数である. スペースの関係で省略するが, これ以外の手順もあり得る.

(1) $$\begin{bmatrix} 3 & -5 & 7 \\ -2 & 4 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}\times\text{②}} \begin{bmatrix} 3 & -5 & 7 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{②}\leftrightarrow\text{①}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -5 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{②}-3\times\text{①}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{②}+2\times\text{①}} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & -2 \end{bmatrix}$$

階数は 2.

(2) $$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 & 15 \\ 2 & 4 & 3 & 12 \\ 1 & 2 & 3 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}\times\text{①}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 12 \\ 1 & 2 & 3 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{③}-\text{①}]{\text{②}-2\times\text{①}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{③}-2\times\text{②}]{\text{①}-\text{②}} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

階数は 2.

(3) $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \\ 1 & 16 & 81 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{③}-\text{①} \\ \text{④}-\text{①}}]{\text{②}-\text{①}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 6 & 24 \\ 0 & 14 & 78 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{③}-3\times\text{②} \\ \text{④}-7\times\text{②}}]{\text{①}-\text{②}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 36 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{②}-\text{③} \\ \text{④}-6\times\text{③}}]{\text{①}+\frac{1}{2}\times\text{③}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{6}\times\text{③}]{\frac{1}{2}\times\text{②}}$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ 階数は 3.

(4) $$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 15 & 1 \\ 5 & 2 & 16 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 2 \\ 7 & 2 & 20 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{②}-2\times\text{③} \\ \text{④}-3\times\text{③}}]{\text{①}-\text{③}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 7 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{③}-2\times\text{①} \\ \text{④}-\text{①}}]{\text{②}-\text{①}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 & -1 \\ 0 & -2 & -6 & -2 \\ 0 & -3 & -9 & 4 \\ 0 & -3 & -9 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}\times\text{②}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -9 & 4 \\ 0 & -3 & -9 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{\text{③}+3\times\text{②} \\ \text{④}+3\times\text{②}}]{\text{①}-2\times\text{②}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{②}-\text{③} \\ \text{④}+\text{③}}]{\substack{\frac{1}{7}\times\text{③} \\ \text{①}+3\times\text{③}}} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ 階数は 3.

$\boxed{4}$ (1) 基本行列は 3×3 型. $A \xrightarrow{③+3\times②} B$ なので, $B = P_{32}(3)A$. 従って, $M = P_{32}(3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

(2) 基本行列は 3×3 型. $A \xrightarrow{3\times②} \bullet \xrightarrow{②\leftrightarrow③} B$ なので, $B = P_{23}P_2(3)A$. 従って, $M = P_{23}P_2(3) = P_{23}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$. 積を「計算」する必要はなく, P_{23} に対応する行基本変形を施せばよいことに注意.

(3) 基本行列は 4×4 型. $A \xrightarrow{②+5\times④} \bullet \xrightarrow{②+2\times①} \bullet \xrightarrow{①\leftrightarrow④} \bullet \xrightarrow{③-3\times②} B$ なので,
$B = P_{32}(-3)P_{14}P_{21}(2)P_{24}(5)A$.

従って, $M = P_{32}(-3)P_{14}P_{21}(2)P_{24}(5) = P_{32}(-3)P_{14}P_{21}(2)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = P_{32}(-3)P_{14}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= P_{32}(-3)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \\ -6 & -3 & 1 & -15 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

$\boxed{5}$ $A = \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[③-a\times①]{②-a\times①} \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1-a^2 & a-a^2 \\ 0 & a-a^2 & 1-a^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ 0 & (1-a)(1+a) & (1-a)a \\ 0 & (1-a)a & (1-a)(1+a) \end{bmatrix}$ ($=B$ とおく).

- $a=1$ のとき $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より $\mathrm{rank}(A) = 1$.

$a \neq 1$ と仮定する. $B \xrightarrow[\frac{1}{1-a}\times②]{\frac{1}{1-a}\times③} \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1+a & a \\ 0 & a & 1+a \end{bmatrix} \xrightarrow{②+③} \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1+2a & 1+2a \\ 0 & a & 1+a \end{bmatrix}$ ($=C$ とおく).

- $2a+1=0$ ($a=-\frac{1}{2}$) のとき $C = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{①-② \\ -2\times②}]{②\leftrightarrow③} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より

  $\mathrm{rank}(A) = 2$.

- $a \neq 1$, $a \neq -\frac{1}{2}$ のとき $C \xrightarrow[③-a\times②]{\frac{1}{1+2a}\times②} \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ より $\mathrm{rank}(A) = 3$.

  階数が判った時点で計算を終了してもよい (簡約行列まで求める必要はない).

以上より,

$$\begin{cases} a = 1 & \Rightarrow \quad \mathrm{rank}(A) = 1, \\ a = -\frac{1}{2} & \Rightarrow \quad \mathrm{rank}(A) = 2, \\ a \neq 1,\ a \neq -\frac{1}{2} & \Rightarrow \quad \mathrm{rank}(A) = 3. \end{cases}$$