

数学演習第一

第4回 線形：行列の基本変形, 簡約行列, 行列の階数

2015年5月27日

1 次の行列が簡約行列ではない理由を1行程度で記し, 簡約行列にするための基本変形を述べよ.

$$(1) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \quad (3) \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2 下の行列の簡約化について, 空欄を埋めよ. (記法は教科書の pp.39-43 に従うこと).

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{\quad} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{\quad} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \square & \square \\ 0 & \square & \square \end{bmatrix} \xrightarrow{\quad} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\quad} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\quad} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \square \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3 次の行列を基本変形で簡約行列に変形し, 階数を求めよ.

$$(1) \begin{bmatrix} 3 & -5 & 7 \\ -2 & 4 & -6 \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 & 15 \\ 2 & 4 & 3 & 12 \\ 1 & 2 & 3 & 9 \end{bmatrix} \quad (3) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \\ 1 & 16 & 81 \end{bmatrix} \quad (4) \begin{bmatrix} 3 & 3 & 15 & 1 \\ 5 & 2 & 16 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 2 \\ 7 & 2 & 20 & 1 \end{bmatrix}$$

4 行列 A に行基本変形を (何回か) 施した結果が B となる時, $MA = B$ を満たす行列 M が存在する (教科書 pp. 43-46 参照). 以下の「行基本変形 (の繰り返し)」について M に相当する行列を記せ.

(例) 2×2 行列に対して「第1行を3倍し, 次に第2行を-2倍する」

(解) 基本行列は 2×2 型, $A \xrightarrow[-2 \times \textcircled{2}]{3 \times \textcircled{1}} B$ なので, $B = P_2(-2)P_1(3)A$.

従って, $M = P_2(-2)P_1(3) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$. 但し, $P_1(-2)$ 等は, 基本行列を表す記号 (教科書 p. 43).

(1) 3×2 行列に対して「第3行へ第2行の3倍を加える」

(2) 3×4 行列に対して「第2行を3倍し, 次に第2行と第3行を入れ換える」

(3) 4×3 行列に対して「第2行へ第4行の5倍を加え, 次に第2行へ第1行の2倍を加え, 次に第1行と第4行を入れ換え, 次に第3行へ第2行の-3倍を加える」

5 演習書 問題 8.2.6 (1) 改: 次の行列の階数を求めよ.

$$\begin{bmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{bmatrix}$$