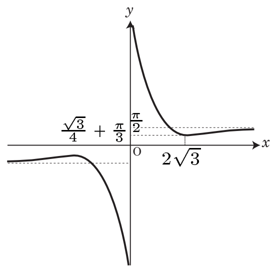
数学演習第一（第 5 回）微積：極値，関数の増減，ロピタルの定理　解答例

2015 年 6 月 3 日 実施分

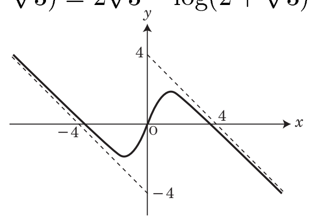
解答では, ロピタルの定理を用いた箇所を $\overset{\star}{=}$ で表した.

$\boxed{1}$ (1) $f(x)$ の定義域は $x \neq 0$ で, $\displaystyle\lim_{x\to-0} f(x) = -\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x) = \infty$. さらに $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$ で, $f(x)$ が奇関数であることにも注意しておく. $f'(x) = -\dfrac{3}{2x^2} + \dfrac{\frac{1}{2}}{1+(\frac{x}{2})^2} = \dfrac{(x+2\sqrt{3})(x-2\sqrt{3})}{2x^2(x^2+4)}$ より, $f(x)$ の増減は下表に従い, 極大値 $f(-2\sqrt{3}) = -\dfrac{3}{4\sqrt{3}} + \mathrm{Tan}^{-1}(-\sqrt{3}) = -\dfrac{\sqrt{3}}{4} - \dfrac{\pi}{3}$, 極小値 $f(2\sqrt{3}) = \dfrac{3}{4\sqrt{3}} + \mathrm{Tan}^{-1}\sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{\pi}{3}$.

x	$-\infty$	$\cdots$	$-2\sqrt{3}$	$\cdots$	-0	$+0$	$\cdots$	$2\sqrt{3}$	$\cdots$	$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	$-\infty$	$-\infty$	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$-\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{3}$	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{3}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$



(2) $f(x) = 4\tanh x - x = \dfrac{4(e^x - e^{-x})}{e^x + e^{-x}} - x$ の定義域は実数全体 $\mathbb{R}$ で奇関数.
また $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \tanh x = \pm 1$ だから $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \{f(x) - (\pm 4 - x)\} = 0$ である.
このことは $x \to \pm\infty$ のとき $y = f(x)$ のグラフが直線 $y = \pm 4 - x$ (複号同順) に漸近することを意味する．増減については，$f(x)$ が奇関数だから $x \geqq 0$ の範囲で調べればよい．$f'(x) = \dfrac{4}{\cosh^2 x} - 1 = 0$ とすると $\cosh^2 x = 4$. すべての実数 x に対して $\cosh x \geqq 1$ だから，$\cosh x = 2$ すなわち $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = 2$. ここで，$t = e^x$ とすると $t^2 - 4t + 1 = 0$ と整理される．ここで $x \geqq 0$ の範囲で調べるので $t \geqq 1$ に注意すると $t = 2 + \sqrt{3}$ がわかる．よって $x = \log(2+\sqrt{3})$ で, この値を境に $f'(x)$ の符号は正から負に変化する．極大値を求めるときは $t = e^x = 2 + \sqrt{3}$ と $\frac{1}{t} = 2 - \sqrt{3}$ を使うと要領良い．極大値は $f(\log(2+\sqrt{3})) = 4\left.\dfrac{t - \frac{1}{t}}{t + \frac{1}{t}}\right|_{t=2+\sqrt{3}} - \log(2+\sqrt{3}) = 2\sqrt{3} - \log(2+\sqrt{3})$.
奇関数だから極小値は $f(-\log(2+\sqrt{3})) = -2\sqrt{3} + \log(2+\sqrt{3})$.



x	$-\infty$	$\cdots$	$-\log(2+\sqrt{3})$	$\cdots$	$\log(2+\sqrt{3})$	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	∞	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$	$-\infty$

$\boxed{2}$ (1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\log\frac{x-1}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\log(x-1) - \log(x+1)}{1/x} \overset{\star}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-2x^2}{(x-1)(x+1)} = -2.$

【別解】$y = \dfrac{1}{x}$ とおけば，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\log\frac{x-1}{x+1} = \lim_{y\to 0} \frac{\log(1-y) - \log(1+y)}{y} = -\lim_{y\to 0} \frac{\log(1-y)}{-y} - \lim_{y\to 0} \frac{\log(1+y)}{y} = -2.$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{Sin}^{-1} x - x}{\mathrm{Tan}^{-1} - x} \overset{\star}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1}{\frac{1}{1+x^2} - 1} = -\lim_{x\to 0} \frac{(1+x^2)(1-\sqrt{1-x^2})}{x^2\sqrt{1-x^2}} = -\lim_{x\to 0} \frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}} \lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} \overset{\star}{=}$ $\displaystyle -\lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{2x} = -\frac{1}{2}$ 【注意】$\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)g(x) = \lim_{x\to 0} f(x) \lim_{x\to 0} g(x)$ を使い，微分の計算量を軽減している.

(3) $\theta = \mathrm{Cos}^{-1} x$ とおくと $x = \cos\theta$ であって，$x \to 1-0$ のとき $\theta \to +0$ だから，$\displaystyle\lim_{x\to 1-0} (\mathrm{Cos}^{-1} x)^2 \tan\frac{\pi x}{2} =$ $\displaystyle\lim_{\theta\to+0} \left(\frac{\theta^2}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)} \sin\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)\right) \overset{\star}{=} \lim_{\theta\to+0} \frac{(\theta^2)'}{\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)\right\}'} = \frac{4}{\pi} \lim_{\theta\to+0} \left(\frac{\theta}{\sin\theta} \cdot \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}\right) = \frac{4}{\pi}.$

【注意】$\displaystyle\lim_{x\to 1-0} (\mathrm{Cos}^{-1} x)^2 \tan\frac{\pi x}{2} \overset{\star}{=} \lim_{x\to 1-0} \frac{\{(\mathrm{Cos}^{-1} x)^2 \sin\frac{\pi x}{2}\}'}{(\cos\frac{\pi x}{2})'} = \cdots$ の方針でも出来るが, 計算量が幾分多くなる.

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{Tan}^{-1} x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \mathrm{Tan}^{-1} x}{\frac{1}{x}} \overset{\star}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1.$

【別解】$\theta = \mathrm{Tan}^{-1} x$ とおけば，(与式) $\displaystyle = \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0} \tan\theta \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \lim_{\phi\to+0} \frac{\phi\cos\phi}{\sin\phi} = 1$ ($\phi = \dfrac{\pi}{2} - \theta$ とした).

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{x - \log x - 1} \overset{\star}{=} \lim_{x\to 1} \frac{(\log x + 1)x^x - 1}{1 - \frac{1}{x}} \overset{\star}{=} \lim_{x\to 1} \frac{x^{x-1} + (\log x + 1)^2 x^x}{\frac{1}{x^2}} = 2.$

(6) $f(x) = \left(\dfrac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ とおけば，$\displaystyle\lim_{x\to 0} \log f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\log(a^x + b^x) - \log 2}{x} \overset{\star}{=} \lim_{x\to 0} \frac{a^x \log a + b^x \log b}{a^x + b^x} = \frac{\log a + \log b}{2} =$ $\log\sqrt{ab}$. よって，$\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} e^{\log f(x)} = e^{\log\sqrt{ab}} = \sqrt{ab}.$

【別解】$y=\dfrac{a^x+b^x}{2}-1$ とおけば, $\displaystyle\lim_{x\to+0}\log f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{\log\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)}{x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to+0}\frac{\log\frac{a^x+b^x}{2}}{\frac{a^x+b^x}{2}-1}\cdot\left(\frac{a^x-1}{x}+\frac{b^x-1}{x}\right)=\frac{1}{2}\lim_{y\to0}\frac{\log(1+y)}{y}\cdot\lim_{x\to+0}\left(\frac{a^x-1}{x}+\frac{b^x-1}{x}\right)=\frac{\log a+\log b}{2}=\log\sqrt{ab}.$

$\boxed{3}$ (1) $p>0$ より $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}x^p\log x=\infty$. 一方, $\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)$ については, $f(x)$ を分数の形にしてからロピタルの定理を使うと, $\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{\log x}{\frac{1}{x^p}}\overset{\star}{=}\lim_{x\to+0}\frac{(\log x)'}{(\frac{1}{x^p})'}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{p}{x^{p+1}}}=-\frac{1}{p}\lim_{x\to+0}x^p=0.$

(2) $f'(x)=(x^p)'\log x+x^p(\log x)'=x^{p-1}(p\log x+1)$ にある指数 $p-1$ に着目して, p と 1 との大小によって状況が変わることを察知しよう. まず, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f'(x)$ については, $p\geqq1$ のとき $p-1\geqq0$ だから, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f'(x)=\infty$. 一方, $0<p<1$ のときは, $1-p>0$ に注意して, ロピタルの定理を使うと, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f'(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{p\log x+1}{x^{1-p}}\overset{\star}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{(p\log x+1)'}{(x^{1-p})'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{p}{x}}{(1-p)x^{-p}}=\frac{p}{1-p}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^{1-p}}=0$. したがって, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f'(x)=\begin{cases}\infty & (p\geqq1)\\ 0 & (0<p<1)\end{cases}$

次に, $\displaystyle\lim_{x\to+0}f'(x)$ については, $p>1$ のとき $p-1>0$ だから, (1) より $\displaystyle\lim_{x\to+0}x^{p-1}\log x=0$. 故に, $\displaystyle\lim_{x\to+0}f'(x)=0$. $0<p\leqq1$ のときは $p-1\leqq0$ だから, $\displaystyle\lim_{x\to+0}x^{p-1}=\infty$ $(0<p<1)$, $=1$ $(p=1)$. このことと $\displaystyle\lim_{x\to+0}\log x=-\infty$ を併せると, $\displaystyle\lim_{x\to+0}f'(x)=\lim_{x\to+0}x^{p-1}(p\log x+1)=-\infty$. したがって, $\displaystyle\lim_{x\to+0}f'(x)=\begin{cases}0 & (p>1)\\ -\infty & (0<p\leqq1)\end{cases}$

(3) $f'(x)=x^{p-1}(p\log x+1)$ は, $\log x=-\dfrac{1}{p}$ 即ち $x=e^{-\frac{1}{p}}$ で負から正に符号変化する. したがって, $f(x)$ $(x>0)$ は $x=e^{-\frac{1}{p}}$ で減少から増加に転じ, 極小値 $f(e^{-\frac{1}{p}})=(e^{-\frac{1}{p}})^p\log e^{-\frac{1}{p}}=e^{-1}\left(-\dfrac{1}{p}\right)=-\dfrac{1}{pe}$ をとる (増減表は割愛).

(4) $g(x)=x^{x^p}$ の底を e に変換すると, $g(x)=e^{\log x^{x^p}}=e^{x^p\log x}=e^{f(x)}$ と表される. したがって, (1) の結果と指数関数の連続性より, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}g(x)=\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to+0}g(x)=e^{\lim_{x\to+0}f(x)}=e^0=1$ (前者については底を変換するまでもない). 合成関数の微分法より, $g'(x)=e^{f(x)}f'(x)=g(x)f'(x)=x^{x^p}x^{p-1}(p\log x+1)=x^{x^p+p-1}(p\log x+1)$ と表される. このとき $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^{x^p+p-1}=\infty$ に注意すると, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}g'(x)=\infty$ が分かる. $\displaystyle\lim_{x\to+0}g'(x)$ については, $\displaystyle\lim_{x\to+0}g(x)=1$ および (2) の結果より, $\displaystyle\lim_{x\to+0}g'(x)=\lim_{x\to+0}g(x)f'(x)=(\lim_{x\to+0}g(x))(\lim_{x\to+0}f'(x))=\begin{cases}0 & (p>1)\\ -\infty & (0<p\leqq1)\end{cases}$

$g'(x)=g(x)f'(x)$ において $g(x)>0$ $(x>0)$ より, $g'(x)$ も $f'(x)$ と同様に $x=e^{-\frac{1}{p}}$ で負から正に符号変化する. したがって, $g(x)$ $(x>0)$ は $x=e^{-\frac{1}{p}}$ で減少から増加に転じ, 極小値 $g(e^{-\frac{1}{p}})=e^{f(e^{-\frac{1}{p}})}=e^{-\frac{1}{pe}}$ をとる.

【注意】$y=f(x)$ や $y=g(x)$ のグラフを描いておくこと. その際, グラフの形状が, $p>0$ の値に応じて, どのように変遷するか考えよう. 特に, (2) や (4) の解答を参照の上, $p=1$ を境にした $x\to+0$ や $x\to\infty$ での接線の傾きの変化に注意すること. また, 余力ある諸君は, $p<0$ のケースを考察してみよう.

$\boxed{4}$ $f(x)$ の定義域は $-1<x<1$, $g(x)$ の定義域は $-1\leqq x\leqq1$ に注意しよう. ($\mathrm{Cos}^{-1}\,x$ の定義域が $-1\leqq x\leqq1$)

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-1+0}f(x)=-\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to1-0}f(x)$ は, $\boxed{2}$(3) と同様に $\theta=\mathrm{Cos}^{-1}\,x$ として, $\displaystyle\lim_{x\to1-0}f(x)=\lim_{\theta\to+0}\frac{\theta\cos\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}=\lim_{\theta\to+0}\left(\frac{\theta}{\sin\theta}\cos\theta\right)=1.$ 【別解】$\displaystyle\lim_{x\to1-0}f(x)\overset{\star}{=}\lim_{x\to1-0}\frac{(x\ \mathrm{Cos}^{-1}\,x)'}{(\sqrt{1-x^2})'}=\lim_{s\to1-0}\frac{\mathrm{Cos}^{-1}\,x-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}=1.$

(2) (1) より $f'(x)>0$ $(-1<x<1)$ を示すのが目標. $\displaystyle f'(x)=\frac{(x\ \mathrm{Cos}^{-1}\,x)'\sqrt{1-x^2}-x\ \mathrm{Cos}^{-1}\,x(\sqrt{1-x^2})'}{1-x^2}=\frac{1}{1-x^2}\left(\sqrt{1-x^2}\ \mathrm{Cos}^{-1}\,x-x+\frac{x^2\ \mathrm{Cos}^{-1}\,x}{\sqrt{1-x^2}}\right)=\frac{\mathrm{Cos}^{-1}\,x-x\sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ だから, $h(x)=\mathrm{Cos}^{-1}\,x-x\sqrt{1-x^2}>0$ $(-1<x<1)$ を示せばよい. $\displaystyle h'(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\sqrt{1-x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}=-2\sqrt{1-x^2}<0$ だから, $h(x)$ は単調減少で, $h(x)>h(1)=0$ $(-1<x<1)$ が分かる. よって, $f'(x)>0$ $(-1<x<1)$ となり, $f(x)$ は単調増加である.

(3) $g'(x)=-f(x)-1+k$ と計算できるので, $g'(x)=0$ は $k=f(x)+1$ と同値である. (1),(2) で調べた連続関数 $f(x)$ の性質から, $\displaystyle k<\lim_{x\to1-0}f(x)+1=2$ のときに限り, $k=f(x^*)+1$ 即ち $g'(x^*)=0$ を満たすような $-1<x^*<1$ がただ 1 つ存在して (中間値の定理), $g'(x)$ の符号は x^* を境に正から負に変化する. 一方, $k\geqq2$ ならば, すべての $-1<x<1$ に対して $k>f(x)+1$ 即ち $g'(x)>0$ である. 結局, $k<2$ ならば, $g(x)$ は一意的な極大値 $g(x^*)$ をもつ. ($k\geqq2$ ならば $g(x)$ は $-1<x<1$ で単調増加)