数学演習第一　(第 6 回)　線形：連立 1 次方程式　解答例　　2015 年 6 月 10 日　実施

$\boxed{1}$ 拡大係数行列を行基本変形の繰り返し (掃き出し法) により階段行列まで変形して, 連立 1 次方程式の解を求める.

8.2.9 (1) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 21 \\ 1 & 2 & 1 & 14 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{①}\leftrightarrow\text{②}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 14 \\ 2 & 3 & 2 & 21 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{③}+\text{①}]{\text{②}-\text{①}\times 2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 14 \\ 0 & -1 & 0 & -7 \\ 0 & 3 & 2 & 15 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\text{②}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & 2 & 15 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow[\text{③}-\text{②}\times 3]{\text{①}-\text{②}\times 2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{③}\times\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{①}-\text{③}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$. よって, $x=3$, $y=7$, $z=-3$.

8.2.9 (3) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & -12 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & -15 \\ 3 & -1 & -1 & -1 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\text{①}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 12 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & -15 \\ 3 & -1 & -1 & -1 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{③}-\text{①} \\ \text{④}-\text{①}\times 3}]{\text{②}-\text{①}\times 2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & -21 \\ 0 & 4 & 2 & -3 & -27 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & -24 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow[\substack{\text{③}-\text{②}\times 4 \\ \text{④}-\text{②}\times 2}]{\text{①}+\text{②}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 & -9 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & -21 \\ 0 & 0 & -10 & 9 & 57 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 18 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{④}\times(-\frac{1}{4})\leftrightarrow\text{③}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 & -9 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & -21 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{9}{2} \\ 0 & 0 & -10 & 9 & 57 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{②}-\text{③}\times 3 \\ \text{④}+\text{③}\times 10}]{\text{①}-\text{③}\times 2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{15}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 12 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{\text{④}\times\frac{1}{4}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{15}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{②}+\text{④}\times\frac{3}{2} \\ \text{③}+\text{④}\times\frac{1}{2}}]{\text{①}+\text{④}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. よって, $x_1=3$, $x_2=-3$, $x_3=-3$, $x_4=3$.

8.2.10 (1) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 13 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{③}-\text{①}]{\text{②}-\text{①}\times 2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 13 \\ 0 & 1 & 5 & -22 \\ 0 & 1 & 5 & -22 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{③}-\text{②}]{\text{①}-\text{②}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -8 & 35 \\ 0 & 1 & 5 & -22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. よって, 主成分に対応しない未知数 x_3 を任意定数 c として, 解は $x_1=35+8c$, $x_2=-22-5c$, $x_3=c$.

8.2.10 (2) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 3 \\ -2 & 4 & 6 & -6 \\ -1 & 2 & 3 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{③}+\text{①}]{\text{②}+\text{①}\times 2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. よって, 主成分に対応しない未知数 x_2, x_3 をそれぞれ c_1, c_2 として, 解は $x_1=3+2c_1+3c_2$, $x_2=c_1$, $x_3=c_2$.

8.2.10 (3) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 13 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{③}-\text{①}]{\text{②}-\text{①}\times 2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 13 \\ 0 & 1 & 5 & -24 \\ 0 & 1 & 5 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{③}-\text{②}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 13 \\ 0 & 1 & 5 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 18 \end{bmatrix}$. よって, 係数行列の階数 $\neq$ 拡大係数行列の階数なので, 解なし.

$\boxed{2}$ (1) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -7 & 1 & -2 \\ 1 & a & a^2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{③}-\text{①}]{\text{②}-\text{①}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & 0 & -3 \\ 0 & a+1 & a^2-1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{②}\times(-\frac{1}{6})} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & a+1 & a^2-1 & 1 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow[\text{③}-\text{②}\times(a+1)]{\text{①}+\text{②}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & a^2-1 & \frac{1}{2}(1-a) \end{bmatrix}$.　$(3,3)$ 成分 $a^2-1=(a-1)(a+1)$ が 0 になるか否かで場合分けを行う.

- $a=1$ のとき, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, 係数行列, 拡大係数行列ともに階数は 2.

• $a=-1$ のとき, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ より, 係数行列の階数は 2, 拡大係数行列の階数は 3.

• $a \neq \pm 1$ のとき, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & a^2-1 & \frac{1}{2}(1-a) \end{bmatrix} \xrightarrow{③\times\frac{1}{a^2-1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{2(a+1)} \end{bmatrix} \xrightarrow{①-③} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3a+4}{2(a+1)} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{2(a+1)} \end{bmatrix}$
より, 係数行列, 拡大係数行列ともに階数は 3.

(2) (1) の計算より, 次の結果が得られる.

(i) 解がただ 1 つなのは, $a \neq \pm 1$ のときで, その解は $x=\frac{3a+4}{2(a+1)},\ y=\frac{1}{2},\ z=\frac{-1}{2(a+1)}$.

(ii) 解が無数にあるのは, $a=1$ のときで, その解は c を任意定数として, $x=\frac{3}{2}-c,\ y=\frac{1}{2},\ z=c$.

(iii) $a=-1$ のとき, $2=$ (係数行列の階数) $<$ (拡大係数行列の階数) $=3$ なので解なし.

$\boxed{3}$ 2 次曲線 $y=a^2+bx+c$ が与えられた 4 点を通るための条件は a, b, c が

$$\begin{cases} a+b+c=-2 \\ 4a-2b+c=7 \\ 4a+2b+c=-1 \\ 9a+3b+c=2 \end{cases}$$

を満たすことである. この連立 1 次方程式の拡大係数行列に行基本変形を繰り返して,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 1 & 7 \\ 4 & 2 & 1 & -1 \\ 9 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[④-①\times 9]{\substack{②-①\times 4 \\ ③-①\times 4}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -6 & -3 & 15 \\ 0 & -2 & -3 & 7 \\ 0 & -6 & -8 & 20 \end{bmatrix} \xrightarrow[④\times\frac{1}{2}]{②\times\frac{1}{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -3 & 7 \\ 0 & -3 & -4 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{②-④} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & -2 & -3 & 7 \\ 0 & -3 & -4 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[④+②\times 3]{\substack{①-② \\ ③+②\times 2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow[④\times\frac{1}{5}]{③\times\frac{1}{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[④-③]{\substack{①+③\times 2 \\ ②-③\times 3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ よってこの連立

1 次方程式は $a=1,\ b=-2,\ c=-1$ をもち, 4 点を通る 2 次曲線 $y=x^2-2x-1$ が得られる.

$\boxed{4}$ (1) 係数行列の行基本変形を行うと

$$\begin{bmatrix} k-6 & 10 & 4 \\ -4 & k+7 & 2 \\ 2 & -4 & k+1 \end{bmatrix} \xrightarrow{①\leftrightarrow③\times\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & \frac{1}{2}(k+1) \\ -4 & k+7 & 2 \\ k-6 & 10 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[③-①\times(k-6)]{②+①\times 4} \begin{bmatrix} 1 & -2 & \frac{1}{2}(k+1) \\ 0 & k-1 & 2k+4 \\ 0 & 2k-2 & \frac{1}{2}(-k^2+5k+14) \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{③-②\times 2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & \frac{1}{2}(k+1) \\ 0 & k-1 & 2k+4 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}(k^2+3k+2) \end{bmatrix} \xrightarrow{③\times(-2)} \begin{bmatrix} 1 & -2 & \frac{1}{2}(k+1) \\ 0 & k-1 & 2(k+2) \\ 0 & 0 & (k+1)(k+2) \end{bmatrix} \cdots (*)$$

ここで, もし $(k+1)(k+2)\neq 0$ ならば, 第 3 行を見ることにより $(k+1)(k+2)z=0$ となり $z=0$ が従う. これは $z\neq 0$ であることに反するので, $(k+1)(k+2)=0$, すなわち $k=-1,-2$. $k=-2$ のとき, 第 2 行に代入すれば, $-3y=0$ から $y=0$ となり, これも $y\neq 0$ に反する. よって, $k=-1$. このとき, $(*)$ の行基本変形を続けると

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{②\times(-\frac{1}{2})} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{①+②\times 2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

主成分に対応しない未知数 z を任意定数 $c\neq 0$ とすれば, $(x, y, z)=(2c, c, c)$ と表され, 確かに $xyz\neq 0$ の解が得られる.

(2) この等しい 3 項の値を k とおけば $6x-10y-4z=kx,\ 4x-7y-2z=ky,\ -2x+4y-z=kz$ であるから, (1) の同次連立 1 次方程式に帰着される. (1) の結果より, $k=-1$ で, $x:y:z=2:1:1$.