数学演習第一（第７回） ２０１５年６月２４日実施分　解答例

$\boxed{1}$ (1) $f^{(n)}(x)=e^x$. (2) $f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}n\right)$. (3) $f^{(n)}(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}n\right)$.

$\boxed{2}$（以下で，θ は，教科書の定理 2.4.3 の実数 $0<\theta<1$ を表す.）

(1) $f^{(k)}(x)=e^x$ ゆえ，$f^{(k)}(0)=e^0=1$, $f^{(n)}(\theta x)=e^{\theta x}$. 故に,

$$\begin{aligned} e^x=f(x)&=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}x^k+\frac{e^{\theta x}}{n!}x^n \\ &=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{e^{\theta x}}{n!}x^n \end{aligned}$$

(2) 演習書の例題 3.8(p.26) の解答と解説のように計算する．$f^{(10)}(\theta x)=\sin(\theta x+5\pi)=-\sin\theta x$ である.（教科書の p.49 例 3 も参照せよ.）

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\frac{1}{9!}x^9-\frac{\sin(\theta x)}{10!}x^{10}$$

(3) 演習書の例題 3.8(p.26) の解答と解説のように計算する．$f^{(11)}(\theta x)=\sin\left(\theta x+\frac{11}{2}\pi\right)=-\cos\theta x$ である.

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\frac{1}{9!}x^9-\frac{\cos(\theta x)}{11!}x^{11}$$

(4) $f^{(k)}(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}k\right)$ ゆえ $f^{(k)}(0)=\cos\left(\frac{\pi}{2}k\right)$．故に k が奇数のとき $f^{(k)}(0)=0$. k が偶数のとき，$k=2m$ (m は整数) とすると，$f^{(2m)}(0)=(-1)^m$．$f^{(10)}(\theta x)=\cos(\theta x+5\pi)=-\cos(\theta x)$ 故に,

$$\begin{aligned} \cos x=f(x)&=\sum_{k=0}^{9}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{f^{(10)}(\theta x)}{10!}x^{10}=\sum_{m=0}^{4}\frac{(-1)^m}{(2m)!}x^{2m}-\frac{\cos(\theta x)}{10!}x^{10} \\ &=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\frac{1}{8!}x^8-\frac{\cos(\theta x)}{10!}x^{10} \end{aligned}$$

(5) ほとんど (4) と同じ．$f^{(11)}(\theta x)=\cos\left(\theta x+\frac{11\pi}{2}\right)=\sin(\theta x)$ ゆえ,

$$\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\frac{1}{8!}x^8-\frac{1}{10!}x^{10}+\frac{\sin(\theta x)}{11!}x^{11}$$

(6) $f'(x)=\frac{1}{1+x}$，$f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}$, $f'''(x)=\frac{2}{(1+x)^3}$, $f^{(4)}(x)=-\frac{2\cdot3}{(1+x)^4}=\frac{(-1)^{4-1}(4-1)!}{(1+x)^4}$．以下同様にして，$f^{(k)}(x)=\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$．よって，$\frac{f^{(0)}(0)}{0!}=0$, $\frac{f^{(k)}(0)}{k!}=\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ $(1\le k)$, $\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}=\frac{(-1)^{n-1}}{n(1+\theta x)^n}$．故に,

$$\begin{aligned} \log(1+x)=f(x)&=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k+\frac{(-1)^{n-1}}{n(1+\theta x)^n}x^n \\ &=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{5}x^5+\cdots+\frac{(-1)^{n-2}}{n-1}x^{n-1}+\frac{(-1)^{n-1}}{n(1+\theta x)^n}x^n \end{aligned}$$

（教科書の p.48 例 1 での式と上記の式を見比べよ.）

(7) $f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}$, $f''(x)=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$,

以下同様にして，$f^{(k)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$.

故に，$\frac{f^{(k)}(0)}{k!}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}=\binom{\alpha}{k}$，$\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}=\binom{\alpha}{n}(1+\theta x)^{\alpha-n}$．よって,

$$(1+x)^\alpha=f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{\alpha}{k}x^k+\binom{\alpha}{n}(1+\theta x)^{\alpha-n}x^n$$

$\boxed{3}$ (1) 演習書問題 3.2.5 (5) ライプニッツの公式（教科書 p.45 定理 2.3.4）を使う．$f(x)=e^{-x}$, $g(x)=x^2$ とおく．$f^{(n-k)}(x)=(-1)^{(n-k)}e^{-x}$, $g'(x)=2x$, $g''(x)=2$, $g^{(k)}(x)=0$ ($k\ge3$ のとき) ゆえ，$n\ge2$ のとき,

$$\begin{aligned} y^{(n)}=(fg)^{(n)}&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}g^{(k)}=\sum_{k=0}^{2}\binom{n}{k}f^{(n-k)}g^{(k)}=f^{(n)}g+nf^{(n-1)}g'+\frac{n(n-1)}{2}f^{(n-2)}g'' \\ &=(-1)^ne^{-x}x^2+2n(-1)^{n-1}e^{-x}x+n(n-1)(-1)^ne^{-x} \\ &=(-1)^ne^{-x}\{x^2-2nx+n(n-1)\} \end{aligned}$$

$y'=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=(2x-x^2)e^{-x}$ だが，これは，上式に $n=1$ を代入したものと一致している.

演習書問題 3.2.5 (10) 分子の次数を分母の次数より低くして計算する．$y=3-\frac{3}{1+x}$ ゆえ，$y^{(n)}=\frac{3(-1)^{n+1}n!}{(1+x)^{n+1}}$.

演習書問題 3.2.5 (12) 部分分数分解して計算する．$y=\frac{1}{x^2-5x+6}=\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}$ だから，$y^{(n)}=\frac{(-1)^nn!}{(x-3)^{n+1}}-\frac{(-1)^nn!}{(x-2)^{n+1}}=(-1)^nn!\left\{\frac{1}{(x-3)^{n+1}}-\frac{1}{(x-2)^{n+1}}\right\}$.

(2) 演習書問題 3.2.5 (3) $\sin^2x=\frac{1-\cos2x}{2}$ ゆえ，$(\sin^2x)^{(n)}=(\sin2x)^{(n-1)}=2^{n-1}\sin(2x+\frac{(n-1)\pi}{2})$.

演習書問題 3.2.5 (6) ライプニッツの公式から演習書の解答が従う．詳細略.

(3) $\{\log|1+2x|\}^{(n)}=2(\frac{1}{1+2x})^{(n-1)}=2^n\cdot\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+2x)^n}=\frac{(-1)^{n-1}2^n(n-1)!}{(1+2x)^n}$.

(4) 演習書問題 3.2.5 (7), (9), (11) については，演習書の解答参照．詳細略.

$\boxed{4}$ $f^{(k)}\left(\frac{1}{2}\right)=e^{\frac{1}{2}}$, $f^{(n)}\left(\frac{1}{2}+\theta\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)=e^{\frac{1}{2}+\theta(x-\frac{1}{2})}$ だから,

$$\begin{aligned} e^x=f(x)&=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(\frac{1}{2})}{k!}\left(x-\frac{1}{2}\right)^k+\frac{f^{(n)}(\frac{1}{2}+\theta(x-\frac{1}{2}))}{n!}\left(x-\frac{1}{2}\right)^n \\ &=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{e^{\frac{1}{2}}}{k!}\left(x-\frac{1}{2}\right)^k+\frac{e^{\frac{1}{2}+\theta(x-\frac{1}{2})}}{n!}\left(x-\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

$\boxed{5}$ $f(x)=x^n$ とおく．$f(x)=x^n$, $f'(x)=nx^{n-1}$, $\frac{f''(x)}{2}=\frac{n(n-1)}{2\cdot1}x^{n-2}=\binom{n}{2}x^{n-2}$, $\frac{f^{(3)}(x)}{3!}=\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}=\binom{n}{3}x^{n-3}$, 以下，同様に考えると，結局，$\frac{f^{(k)}(x)}{k!}=\binom{n}{k}x^{n-k}$ が，$0\le k\le n$ なる整数 k に対して成り立つことがわかる．特に，$\frac{f^{(n)}(x)}{n!}=1$ ゆえ，$\frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}=1$．また，$\frac{f^{(k)}(a)}{k!}=\binom{n}{k}a^{n-k}$ $(k=0,1,\ldots,n-1)$．故に,

$$\begin{aligned} x^n=f(x)&=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n \\ &=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}a^{n-k}(x-a)^k+(x-a)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}(x-a)^k \end{aligned}$$

これは，$x^n=\{(x-a)+a\}^n$ として二項展開した式に他ならない.

$\boxed{6}$ (1) $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y}\right)=-\frac{y'}{y^2}$ だから，$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{y}\right)=-\frac{y''}{y^2}+\frac{2(y')^2}{y^3}=\frac{-yy''+2(y')^2}{y^3}$,

同様にして，$\frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{1}{y}\right)=\frac{6yy'y''-y^2y'''-6(y')^3}{y^4}$

(2) 帰納的に証明する．$m\le n$ とし，$\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\left(\frac{1}{y}\right)=\frac{P_{m-1}(y,y',y'',\ldots,y^{(m-1)})}{y^m}$ となっていたとする．すると，$\frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{1}{y}\right)=\frac{1}{y^{m+1}}\left(y\frac{d}{dx}P_{m-1}-my'P_{m-1}\right)$ で，$P_m=y\frac{d}{dx}P_{m-1}-my'P_{m-1}$ が $y,y',\ldots,y^{(m)}$ の多項式ゆえ，成り立つ.