数学演習第一

第7回　高次の導関数，テーラーの定理，有限テイラー展開

2015 年 6 月 24 日

1 次の関数の n 次の導関数を求めよ．

(1) $f(x) = e^x$　　(2) $f(x) = \sin x$　　(3) $f(x) = \cos x$

なお，(2), (3) については，n 次の導関数のうまい表示法がある．教科書 p.40 例 3 参照．

2 次の関数に教科書の定理 2.4.3（有限マクローリン展開）を適用し，指定された次数の剰余項まで求めよ．ここで,「第 n 次の」剰余項の意味は，演習書の例題 3.8 の解答・解説と同じ意味である．また，この問題に限り，階乗 (例えば 10! など）は計算しなくてよい．

(1) $f(x) = e^x$ （第 n 次の剰余項まで.）

(2) $f(x) = \sin x$ （第 10 次の剰余項まで．シグマ記号を用いずに記せ.）

(3) $f(x) = \sin x$ （第 11 次の剰余項まで．シグマ記号を用いずに記せ.）

(4) $f(x) = \cos x$ （第 10 次の剰余項まで．シグマ記号を用いずに記せ.）

(5) $f(x) = \cos x$ （第 11 次の剰余項まで．シグマ記号を用いずに記せ.）

(6) $f(x) = \log(1+x)$ 　（第 n 次の剰余項まで.）

(7) $f(x) = (1+x)^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ （第 n 次の剰余項まで.）ただし，この問題では，次の記号を使ってよい．

$$\binom{\alpha}{k} = \begin{cases} \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!} & (k\text{ が正の整数のとき}) \\ 1 & (k=0\text{ のとき}) \end{cases}$$

（α が自然数のときの 2 項係数を α が任意の実数の場合に一般化したもの.）

3 (1) 演習書の問題 3.2.5 (5), (10), (12) を解け．

(2) 演習書の問題 3.2.5 (3), (6) を解け．

(3) $\log(1+2x)$ の n 次の導関数を求めよ．

(4) 時間に余裕があれば，演習書の問題 3.2.5 (7), (9), (11) も解け．

4 演習書の問題 3.2.8 を解け.（教科書の定理 2.4.2(有限テーラー展開）参照）

5 x^n (n は自然数）に教科書の定理 2.4.2(有限テーラー展開）を適用して，$x=a$ を中心とする有限テーラー展開を第 n 次の剰余項まで求めよ．ここで,「第 n 次の」剰余項の意味は，演習書の例題 3.8 の解答・解説と同じ意味である．

6 $y = f(x) \neq 0$ を n 回微分可能な関数とする．以下の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{d^2}{dx^2}\left(\dfrac{1}{y}\right)$，$\dfrac{d^3}{dx^3}\left(\dfrac{1}{y}\right)$ を求めよ．

(2) $m = 1, 2, \dots, n$ に対し，$\dfrac{d^m}{dx^m}\left(\dfrac{1}{y}\right) = \dfrac{P_m(y, y', y'', \dots, y^{(m)})}{y^{m+1}}$ となることを示せ．

ここで，$P_m(y, y', y'', \dots, y^{(m)})$ は，y, y', y'', $\dots$, $y^{(m)}$ の多項式を表す．