数学演習第一（第 8 回）2015 年 7 月 1 日実施分　解答例

$\boxed{1}$ $[\,A\mid E\,]$ を (行基本変形により) 簡約行列に変形したとき, $[\,E\mid A'\,]$ の形なら A' が逆行列（E は単位行列を表す）. 以下で，A' の部分を取り出して，A' が逆行列というのは省略している（試験では，もちろん，逆行列の部分をきちんと書かないといけません）. また，この形にならなければ, 逆行列を持たない.

問題 8.3.4 (1)

$$\left[\begin{array}{cc|cc}2&4&1&0\\3&5&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc|cc}2&4&1&0\\1&1&-1&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc|cc}1&1&-1&1\\2&4&1&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc|cc}1&1&-1&1\\0&2&3&-2\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{cc|cc}1&1&-1&1\\0&1&3/2&-1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc|cc}1&0&-5/2&2\\0&1&3/2&-1\end{array}\right]$$

問題 8.3.4 (2)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&3&6&1&0&0\\3&6&9&0&1&0\\6&9&11&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&3&6&1&0&0\\0&-3&-9&-3&1&0\\0&-9&-25&-6&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-3&-2&1&0\\0&-3&-9&-3&1&0\\0&0&2&3&-3&1\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-3&-2&1&0\\0&1&3&1&-1/3&0\\0&0&1&3/2&-3/2&1/2\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&5/2&-7/2&3/2\\0&1&0&-7/2&25/6&-3/2\\0&0&1&3/2&-3/2&1/2\end{array}\right]$$

問題 8.3.4 (3)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}-1&1&1&1&0&0\\1&-1&1&0&1&0\\1&1&-1&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&1&1\\1&-1&1&0&1&0\\1&1&-1&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&1&1\\0&-2&0&-1&0&-1\\0&0&-2&-1&-1&0\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&1&1\\0&1&0&1/2&0&1/2\\0&0&1&1/2&1/2&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&1/2&1/2\\0&1&0&1/2&0&1/2\\0&0&1&1/2&1/2&0\end{array}\right]$$

問題 8.3.4 (5)

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}2&1&1&0&1&0&0&0\\1&2&0&1&0&1&0&0\\1&0&2&1&0&0&1&0\\0&1&1&2&0&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&2&0&1&0&1&0&0\\2&1&1&0&1&0&0&0\\1&0&2&1&0&0&1&0\\0&1&1&2&0&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&2&0&1&0&1&0&0\\0&-3&1&-2&1&-2&0&0\\0&-2&2&0&0&-1&1&0\\0&1&1&2&0&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&2&0&1&0&1&0&0\\0&1&1&2&0&0&0&1\\0&-2&2&0&0&-1&1&0\\0&-3&1&-2&1&-2&0&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&2&0&1&0&1&0&0\\0&1&1&2&0&0&0&1\\0&0&4&4&0&-1&1&2\\0&0&4&4&1&-2&0&3\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&2&0&1&0&1&0&0\\0&1&1&2&0&0&0&1\\0&0&4&4&0&-1&1&2\\0&0&0&0&1&-1&-1&1\end{array}\right]$$

よって逆行列なし.

$\boxed{2}$ (1) 連立 1 次方程式 $\begin{cases}ax+by=1\\cx+dy=0\end{cases}$ を解く．未知数 y を消去するために，第一式を d 倍し，第二式を b 倍して, 引き算すると，$(ad-bc)x=d$ を得る．同様に，未知数 x を消去して，$(ad-bc)y=-c$ を得る．$ad-bc\neq 0$ と仮定しているので，$x=d/(ad-bc)$, $y=-c/(ad-bc)$ となる．

(2) 連立 1 次方程式 $\begin{cases}az+bw=0\\cz+dw=1\end{cases}$ を解く．未知数 w を消去して，$(ad-bc)z=-b$ を得る．同様に, 未知数 z を消去して, $(ad-bc)w=a$ を得る．$ad-bc\neq 0$ と仮定しているので, $z=-b/(ad-bc)$, $y=a/(ad-bc)$ となる．

(3) 題意のような X が存在したとすると，(1) の計算過程より，$(ad-bc)x=d$, $(ad-bc)y=-c$ がわかる．もし，$ad-bc=0$ とすると，$d=0, c=0$ となる．一方，(2) の計算過程より，$cz+dw=1$ でないといけないが，これに $c=0, d=0$ を代入すると，$0=1$ となって矛盾する．故に $ad-bc\neq 0$.

(4) A が正則とすると，(3) の仮定が成り立つ．故に $ad-bc\neq 0$ となる．逆に，$ad-bc\neq 0$ とするとき，$X=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}$ とおく（こうおけば良さそうということは (1), (2) の考察からわかる）と，$AX=E, XA=E$ となることが直接計算で示される．故に，A は正則で，X が逆行列．特に，

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}.$$

$\boxed{3}$ 教科書の p.66 例 10.2 を使って計算する．

(1) $\begin{vmatrix}2&3\\4&5\end{vmatrix}=2\cdot 5-3\cdot 4=-2.$ (2) $\begin{vmatrix}3&-2\\4&4\end{vmatrix}=3\cdot 4-(-2)\cdot 4=20.$ (3) $\begin{vmatrix}\lambda-1&2\\-1&\lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-4)+2=\lambda^2-5\lambda+6=(\lambda-2)(\lambda-3).$ (4) $\begin{vmatrix}0&-2&2\\-2&3&5\\0&0&8\end{vmatrix}=-32.$ (5) $\begin{vmatrix}\lambda&-2&-2\\2&\lambda-3&-5\\0&0&\lambda-8\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-3)(\lambda-8)-4(\lambda-8)=(\lambda^2-3\lambda-4)(\lambda-8)=(\lambda-4)(\lambda+1)(\lambda-8)$

$\boxed{4}$ 係数行列が同じ 5 つの連立一次方程式を同時に解くと考える．

$$\left[\begin{array}{cccc|ccccc}0&1&2&3&6&6&6&6&-6\\1&2&3&2&2&2&2&-2&2\\2&3&2&1&2&2&-2&2&2\\3&2&1&0&6&-6&6&6&6\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc|ccccc}1&2&3&2&2&2&2&-2&2\\0&1&2&3&6&6&6&6&-6\\2&3&2&1&2&2&-2&2&2\\3&2&1&0&6&-6&6&6&6\end{array}\right]\to$$

$$\left[\begin{array}{cccc|ccccc}1&2&3&2&2&2&2&-2&2\\0&1&2&3&6&6&6&6&-6\\0&-1&-4&-3&-2&-2&-6&6&-2\\0&-4&-8&-6&0&-12&0&12&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc|ccccc}1&2&3&2&2&2&2&-2&2\\0&1&2&3&6&6&6&6&-6\\0&0&-2&0&4&4&0&12&-8\\0&0&0&6&24&12&24&36&-24\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{cccc|ccccc}1&2&3&2&2&2&2&-2&2\\0&1&2&3&6&6&6&6&-6\\0&0&1&0&-2&-2&0&-6&4\\0&0&0&1&4&2&4&6&-4\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc|ccccc}1&2&3&0&-6&-2&-6&-14&10\\0&1&2&0&-6&0&-6&-12&6\\0&0&1&0&-2&-2&0&-6&4\\0&0&0&1&4&2&4&6&-4\end{array}\right]\to$$

$$\to\left[\begin{array}{cccc|ccccc}1&2&0&0&0&4&-6&4&-2\\0&1&0&0&-2&4&-6&0&-2\\0&0&1&0&-2&-2&0&-6&4\\0&0&0&1&4&2&4&6&-4\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc|ccccc}1&0&0&0&4&-4&6&4&2\\0&1&0&0&-2&4&-6&0&-2\\0&0&1&0&-2&-2&0&-6&4\\0&0&0&1&4&2&4&6&-4\end{array}\right]=[\,E\mid A^{-1}B\,]$$

$\boxed{5}$ (1) A の逆行列を B とし, ヒントにあるように, B の分割 $B=\begin{bmatrix}B_{11}&B_{12}\\B_{21}&B_{22}\end{bmatrix}$ を考える．$AB=E_{r+s}$ より，$\begin{bmatrix}A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21}&A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22}\\A_{21}B_{11}&A_{21}B_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E_r&O\\O&E_s\end{bmatrix}$．$A_{21}B_{12}=E_s$ ゆえ，教科書の系 9.2 (ii) より A_{21} は正則で，$B_{12}=A_{21}^{-1}$．よって，$A_{21}B_{11}=O$ の両辺に左から A_{21}^{-1} をかけて，$B_{11}=O$. 故に．$A_{12}B_{21}=E_r$ となり，再び，教科書の系 9.2 (ii) より A_{12} は正則で，$B_{21}=A_{12}^{-1}$ となる．（このとき，$A_{12}B_{22}=-A_{11}B_{12}=-A_{11}A_{21}^{-1}$ の両辺に左から A_{12}^{-1} をかけて，$B_{22}=-A_{12}^{-1}A_{11}A_{21}^{-1}$.）

(2) $B=\begin{bmatrix}O&A_{21}^{-1}\\A_{12}^{-1}&-A_{12}^{-1}A_{11}A_{21}^{-1}\end{bmatrix}$ とおくと，確かに $BA=E_{r+s}$, $AB=E_{r+s}$ となるので，A は正則行列となる．