数学演習第一

第８回　正則行列，逆行列，２次または３次の行列式

2015 年 7 月 1 日

1 演習書問題 8.3.4 (1), (2), (3), (5) を解け．

2 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ を２次の正方行列とする．

(1) $ad - bc \neq 0$ のとき，x, y の連立一次方程式 $A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ を解け．

(2) $ad - bc \neq 0$ のとき，z, w の連立一次方程式 $A\begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ を解け．

(3) $AX = E$ (E は２次の単位行列) となる２次の正方行列 $X = \begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix}$ が存在すれば，$ad - bc \neq 0$ となることを示せ．

(4) A が正則であるための条件は，$ad - bc \neq 0$ であることを示せ．また，このときの A の逆行列を求めよ．

3 次の行列式を計算せよ．なお，(3) と (5) については因数分解された形で答えよ．

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}$　(3) $\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ -1 & \lambda - 4 \end{vmatrix}$　(4) $\begin{vmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix}$　(5) $\begin{vmatrix} \lambda & 2 & -2 \\ 2 & \lambda - 3 & -5 \\ 0 & 0 & \lambda - 8 \end{vmatrix}$

4 正則行列 A と，行列 B を以下のように与える．

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 6 & 6 & -6 \\ 2 & 2 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 2 & 2 \\ 6 & -6 & 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

このとき，$A^{-1}B$ を求めよ．

5 $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & O \end{bmatrix}$ を $(r+s)$ 次の正方行列の分割で，A_{11} は r 行 s 列，A_{12} は r 行 r 列，A_{21} は s 行 s 列，O は s 行 r 列であるとする．

(1) A が正則行列ならば，A_{12} と A_{21} は正則行列になることを示せ．
（ヒント：A の逆行列 B を $B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$（$B_{11}$ は s 行 r 列，B_{12} は s 行 s 列，B_{21} は r 行 r 列，B_{22} は r 行 s 列）と分割して考えよ.）

(2) 逆に，A_{12} と A_{21} が正則行列ならば，A が正則行列になることを示せ．
（ヒント：仮に逆行列があったとして，上記の逆行列の分割で，$B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22}$ が，$A_{12}^{-1}, A_{21}^{-1}, A_{11}$ を用いてどのように記述されるか，考えよ．そして，その結果より，逆行列の目星をつけよ.）