

2015年度 数学演習第一 演習第9回「漸近展開・積分の計算(1)」解答例

□ (以下, 本問でランダウの  $o$  を使うときはいつも,  $(x \rightarrow 0)$  を省略している.)

(1)  $5^x = e^{x \log_e 5}$  より, (c) 式の  $x$  を  $x \log_e 5$  に置き換えて,

$$5^x = 1 + (\log_e 5)x + \frac{(\log_e 5)^2}{2}x^2 + \frac{(\log_e 5)^3}{6}x^3 + \frac{(\log_e 5)^4}{24}x^4 + o(x^4).$$

(2) (a) 式で  $\alpha = -\frac{1}{2}$  として,  $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2}x^2 + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{6}x^3 + o(x^3) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + o(x^3)$ .  $x$  を  $-x^2$  に置き換えて,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + o(x^6).$$

(3) (c) 式の  $x$  を  $-x$  に置き換えて,  $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$ . よって,  $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$  より

$$\begin{aligned} \sinh x &= \frac{1}{2} \left\{ \left( 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \right) - \left( 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \right) \right\} \\ &= x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^4). \end{aligned}$$

(4)  $\frac{x}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{2-x} \cdot \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + o(x^4) \cdot \frac{2}{2-x} = \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = 1 + \frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \left(\frac{x}{2}\right)^4 + o(x^4)$  だから,

$$\frac{x}{x^2 - 3x + 2} = \frac{x}{2} + \frac{3}{4}x^2 + \frac{7}{8}x^3 + \frac{15}{16}x^4 + o(x^4).$$

(5) (a) 式において  $\alpha = -\frac{1}{2}$  とすると,  $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 + o(x^4)$ . これより,

$$\frac{1-x}{\sqrt{1+x}} = (1-x) \left( 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 + o(x^4) \right) = 1 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{8}x^2 - \frac{11}{16}x^3 + \frac{75}{128}x^4 + o(x^4).$$

(6) (b) 式から  $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)$ . (d) 式で  $x$  を  $-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)$  に置き換えて

$$\begin{aligned} \log(\cos x) &= \left( -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} \right) - \frac{1}{2} \left( -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} \right)^2 + \frac{1}{3} \left( -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} \right)^3 + o(x^6) \\ &= -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6 + o(x^6) \end{aligned}$$

(7) (2) を積分して

$$\sin^{-1} x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + o(x^7)$$

(8) (b) 式の  $x$  を  $x^2 + x$  に置き換えて,  $\sin(x^2 + x) = (x^2 + x) - \frac{(x^2 + x)^3}{3!} + o(x^4) = x + x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ . よって,

$$\int_0^x \sin(t^2 + t) dt = \int_0^x \left( t + t^2 - \frac{1}{6}t^3 + o(t^3) \right) dt = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{24}x^4 + o(x^4).$$

(9)  $\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1 + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)}$  として (a) 式を用いると

$$\frac{x}{\cos x} = x \left\{ 1 - \left( -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) \right) + \left( -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) \right)^2 + o(x^5) \right\} = x + \frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{24}x^5 + o(x^5).$$

(求めるものを  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + o(x^5)$  とおき,  $x = f(x) \cos x$  に代入して,

$x = (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + o(x^5)) \left( 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^5) \right)$ . この右辺を展開して両辺を比

較することでも求められる).

(10)  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \sin x \cdot \frac{1}{\cos x}$  とみる. (9) の式をよく見ると,  $\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^5)$  であることがわかるから,  $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$  を用いて

$$\tan x = \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right) \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4\right) + o(x^5) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5).$$

注意: ランダウ記号に関して,  $\frac{d}{dx}o(x^n) = o(x^{n-1})$  は成り立たない. 例えば,  $f(x) = x^{n+1} \sin \frac{1}{x} \in o(x^n)$  だが,  $f'(x) = (n+1)x^n \sin \frac{1}{x} - x^{n-1} \cos \frac{1}{x} \notin o(x^{n-1})$  である. 従って, 例えば  $\tan x$  の漸近展開を求めるのに,  $(\log(\cos x))' = -\tan x$  であることから,  $\log(\cos x)$  の漸近展開 (6) を微分して求めるという方法や,  $f(x) = \tan x$  が奇関数なので  $f^{(2n)}(0) = 0$  になることに注意し,  $f(x) = a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + o(x^5)$  とおいて,  $f'(x) = 1 + \{f(x)\}^2$  に代入し, 係数比較を行うという方法は (現在までの学習内容だけでは) 正当化するのが難しい.

これらの方法は, 後期の「解析学」の講義で整級数展開を学ぶことで正当化することができるようになる.

② (1) ①(3) を用いて  $\sinh^2 x = \left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 = x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^4)$ . よって,

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sinh^2 x} = \frac{\sinh^2 x - x^2}{x^2 \sinh^2 x} = \frac{\frac{x^4}{3} + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} \rightarrow \frac{1}{3} \quad (x \rightarrow 0).$$

(2) (b) 式から  $\sin(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^6)$  より,

$$\frac{1}{x^7} \int_0^x (\sin(t^2) - t^2) dt = \frac{1}{x^7} \int_0^x \left(-\frac{t^6}{6} + o(t^6)\right) dt = \frac{1}{x^7} \left(-\frac{x^7}{42} + o(x^7)\right) \rightarrow -\frac{1}{42} \quad (x \rightarrow 0).$$

③ (不定積分に対する積分定数は省略する.)

(1) (i)  $e^x = t$  と置き換えることで  $e^x dx = dt$  より,  $\int \frac{e^{2x}}{e^x + 1} dx = \int \frac{t}{t+1} dt = \int \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) dt = t - \log|t+1| = e^x - \log(e^x + 1)$ .

(ii) 部分積分により,  $\int x^2 \log x dx = \int \left(\frac{x^3}{3}\right)' \log x dx = \frac{x^3 \log x}{3} - \int \frac{x^3}{3} \cdot (\log x)' dx = \frac{x^3 \log x}{3} - \int \frac{x^2}{3} dx = \frac{x^3 \log x}{3} - \frac{x^3}{9} = \frac{x^3}{9}(3 \log x - 1)$ .

(iii)  $\cos x = t$  とおくと  $-\sin x dx = dt$  より,  $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} dx = -\int \frac{dt}{1 - t^2} = -\frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right) dt = \frac{1}{2} \log \left|\frac{1-t}{1+t}\right| = \frac{1}{2} \log \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$ .

(iv)  $m \neq n$  のとき, 与えられた定積分は,  $-\frac{1}{2} \int_0^\pi \{\cos(m+n)x - \cos(m-n)x\} dx = -\frac{1}{2} \left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} - \frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right]_0^\pi = 0$ .  $m = n$  のとき,  $\int_0^\pi \sin^2 mx dx = \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2mx}{2} dx = \frac{1}{2} \left[x - \frac{\sin 2mx}{2m}\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$ .

(v) 与えられた定積分を  $I$  とすると,  $I = [e^{-x} \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \sin x dx = e^{-\frac{\pi}{2}} + [-e^{-x} \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \cos x dx = e^{-\frac{\pi}{2}} + 1 - I$  となるので,  $I = \frac{1}{2}(e^{-\frac{\pi}{2}} + 1)$ .

(vi)  $\int_0^\pi \left|\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right| dx = \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) dx - \int_{\frac{3\pi}{4}}^\pi \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) dx = [-\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)]_0^{\frac{3\pi}{4}} - [-\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)]_{\frac{3\pi}{4}}^\pi = 2\sqrt{2}$ .

(vii)  $\cos x = t$  とおくと  $-\sin x dx = dt$  より, 与えられた定積分は  $-\int_{\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}} \log(1-t^2) dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \log(1-t) + \log(1+t) dt = [(t-1) \log(1-t) + (1+t) \log(1+t) - 2t]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = 3 \log 3 - 2 \log 2 - 2$ .

(2) (i)  $f'(x) = \frac{1}{\log x^3} \cdot 3x^2 - \frac{1}{\log x^2} \cdot 2x = \frac{x^2 - x}{\log x}$ . (ii)  $\int_0^x (t-x) \sin t dt = \int_0^x t \sin t dt - x \int_0^x \sin t dt$  より,  $g'(x) = x \sin x - \int_0^x \sin t dt - x \sin x = -\int_0^x \sin t dt = [\cos t]_0^x = \cos x - 1$ .