# 数学演習第一　第9回　「漸近展開, 積分の計算(1)」

(2015.7.8 実施)

**要点**：関数 $f(x)$ の $x=0$ における $n$ 次の漸近展開を求めることとは,

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + o(x^n)\ (x \to 0) \quad \cdots (*)$$

となる多項式 $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ を求めることである．$f(x)$ の有限マクローリン展開から，$a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ と求められる．しかし一般に高階導関数を計算するのは煩雑になることが多いため，$x=0$ **における漸近展開を求めるのに** $f^{(n)}(0)$ **を直接計算するのは大変**である．$x=0$ の回りで十分に滑らかな関数 $f(x)$ に対して，$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ は一意的に定まることに注意すると，**簡単な関数の漸近展開を組み合わせる**ことで，$(*)$ を満たす $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ をひとつ見つけてしまえば，それが漸近展開に他ならない．こうして**より複雑な関数の漸近展開を求める**ことができる．

有限マクローリン展開を用いることで，次のような簡単な関数を漸近展開できる．例えば 6 次まで漸近展開してみると次のようになる．

(a) $(1+x)^\alpha = 1 + \dbinom{\alpha}{1}x + \dbinom{\alpha}{2}x^2 + \cdots + \dbinom{\alpha}{6}x^6 + o(x^6)$
ただし $\dbinom{\alpha}{k} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$ を一般二項係数という (教科書 p.151).
特に $\alpha = -1$ とすると $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 + o(x^6)$

(b) $\cos x = 1 - \dfrac{1}{2!}x^2 + \dfrac{1}{4!}x^4 - \dfrac{1}{6!}x^6 + o(x^6),\ \sin x = x - \dfrac{1}{3!}x^3 + \dfrac{1}{5!}x^5 + o(x^6)$

(c) $e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{1}{3!}x^3 + \dfrac{1}{4!}x^4 + \dfrac{1}{5!}x^4 + \dfrac{x^6}{6!} + o(x^6)$

(d) $\log(1+x) = x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{4}x^4 + \dfrac{1}{5}x^5 - \dfrac{1}{6}x^6 + o(x^6)$

**例題**　次の関数の $x=0$ における 3 次の漸近展開を求めよ．(1) $e^x \cos x$　(2) $\mathrm{Tan}^{-1} x$

［解］ $e^x$ と $\cos x$ の 3 次までの漸近展開を用いると $e^x \cos x = \left(1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6}\right)\left(1 - \dfrac{1}{2!}x^2\right) + o(x^3) = \left(1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6}\right) - (1+x)\dfrac{x^2}{2} + o(x^3) = 1 + x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$.

$\displaystyle\int_0^x o(t^n)dt = o(x^{n+1})\ (x \to 0)$ も有用である．

$(\mathrm{Tan}^{-1}(x))' = \dfrac{1}{1+x^2}$ の 2 次までの漸近展開は，$\dfrac{1}{1+x}$ の 1 次までの漸近展開 $1 - x + o(x)$ を用いて $\dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + o(x^2)$ と求められるので，$\mathrm{Tan}^{-1}(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$ となる．□

**1** **（漸近展開）** 次の関数について $x=0$ における漸近展開を指定された次数まで求めよ．$\displaystyle\int_0^x o(t^n)dt = o(x^{n+1})\ (x\to 0)$ を用いて良い．

(1) $5^x$ (4 次)　　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (6 次)　　(3) $\sinh x$ (4 次)

(4) $\dfrac{x}{x^2-3x+2}$ (4 次)　　(5) $\dfrac{1-x}{\sqrt{1+x}}$ (4 次)　　(6) $\log(\cos x)$ (6 次)

(7) $\mathrm{Sin}^{-1}x$ (7 次)　　(8) $\displaystyle\int_0^x \sin(t^2+t)dt$ (4 次)　　(9) $\dfrac{x}{\cos x}$ (5 次)

(10) $\tan x$ (5 次)

**2** **（漸近展開の応用）** 漸近展開を用いて次の 2 つの極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sinh^2 x}\right)$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^7}\int_0^x(\sin(t^2)-t^2)dt$

**3** **（積分の基礎）**

(1) 次の不定積分・定積分を求めよ．

(i) $\displaystyle\int\frac{e^{2x}}{e^x+1}dx$　　(ii) $\displaystyle\int x^2\log x dx$　　(iii) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin x}$

(iv) $\displaystyle\int_0^{\pi}\sin mx\sin nx dx$　($m,n$ は自然数)

(v) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-x}\cos x dx$　　(vi) $\displaystyle\int_0^{\pi}|\sin x+\cos x|dx$　　(vii) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\sin x\log(\sin^2 x)dx$

(2) 次の定積分で表された関数の導関数を求めよ．

(i) $\displaystyle f(x)=\int_{x^2}^{x^3}\frac{dt}{\log t}$　　(ii) $\displaystyle g(x)=\int_0^x(t-x)\sin t dt$