数学演習第一　第10回「4次以上の行列式」(2014.7.15実施)　解答例

$\boxed{1}$ $(-1)^{1+1}\cdot 2\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{4+1}\cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 23.$

$\boxed{2}$ (0) は「やってはいけない」ので省略.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -4 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -4 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

(1) $2\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2\cdot 0 + 2 = 2.$ (2) $(-2)\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = (-2)\cdot 6 + 14 = 2.$ (3) $2\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 1 = 2.$ (4) $2\begin{vmatrix} -3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -4 & -3 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 2\cdot 5 - 8 = 2.$

(5) $-\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & -4 & -3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -14 - 2\cdot(-8) = 2.$

$\boxed{3}$ (1) 第2行の-2倍, -3倍, -4倍をそれぞれ第1行, 第3行, 第4行に加える. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 1 & 7 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & -5 & 3 \\ 4 & -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} =$

$\begin{vmatrix} 0 & -15 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 1 & -1 \\ 0 & -16 & -8 & 6 \\ 0 & -31 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -15 & 1 & 0 \\ -16 & -8 & 6 \\ -31 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -(360 + 48 - 186 - 180) = -42.$

(2) 第1列，第3列からa倍をくくり出す．第2行の$1, 1, -1$倍を第$1, 3, 4$行にそれぞれ加える．これにより，$a^2\left|\begin{array}{cc|cc} 0 & 1-a & 0 & 1-a \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & -1+a & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & -1-a \end{array}\right|$．ブロック分けに注意すれば，$a^2(1-a)^2(1+a)$.

(3) 第1行に関して余因子展開すると，A_{11}は対角成分が1の下三角$n-1$次行列であり，A_{1n}は対角成分が(-1)の上三角$n-1$次行列なので，求める行列式は$1 + (-1)^{n+1}(-1)(-1)^{n-1} = 0$.
(4) まず第2行から第n行をすべて第1行に加えると，第1行は$(a+n-1)(1, 1, \ldots, 1)$になる．そこで$(a+n-1)$倍をくくりだしたうえで，第1行を第2行から第n行までのすべての行から引く．ここまでの操作は

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & a \\ 1 & 1 & \cdots & a & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & a & \cdots & 1 & 1 \\ a & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a+n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & a & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & a & \cdots & 1 & 1 \\ a & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a+n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & a-1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a-1 & \cdots & 0 & 0 \\ a-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

である．次に第1行から第n行の並べ方を逆に並べ替える．これにより，$(-1)^{(n-1)+(n-2)+\cdots+1} =$

$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ がくくりだされて，下三角行列が得られる．

$$(a+n-1)(-1)^{n(n-1)/2}\begin{vmatrix} a-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-1 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

よって求める値は，$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(a+n-1)(a-1)^{n-1}$．(5) 求める行列式を d_n とすると，1 列目に関する余因子展開 (=**定義 10.1**) から，

$$d_n = 2d_{n-1} - (-1)\begin{vmatrix} -1 & 0 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2d_{n-1} - d_{n-2}$$

となる．これは，$d_n - d_{n-1} = d_{n-1} - d_{n-2}$ と変形できるので，d_n は公差 1 の等差数列であり，$d_1 = 2, d_2 = 3$ に注意すれば，$d_n = n+1$ である．

$\boxed{4}$ (1) $\widetilde{A}$ の (i,j)-成分は $(-1)^{i+j}|A_{ji}|$ であることに注意して計算すれば，$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} -3 & -6 & 9 \\ -2 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ となる．(2) A に**例 10.2** の方法を適用すれば，$|A| = -12$ とわかる．あるいは，$A\widetilde{A} = |A|E_n$ の $(1,1)$-成分を比較しているとみれば，$A\widetilde{A}$ を直接計算することでも得られる．(3) $|A| \neq 0$ なので，A は正則で，$A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\widetilde{A} = -\dfrac{1}{12}\begin{bmatrix} -3 & -6 & 9 \\ -2 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$．(4) $A\widetilde{A} = |A|E_n$ において，両辺の行列式を比較すると，左辺は $|A\widetilde{A}| = |A||\widetilde{A}|$．右辺は，$|A|^n$ である．（ここで一般に $|cE_n| = c^n$ であることに注意せよ.）本問では $n=3$ であるから，$|\widetilde{A}| = |A|^2 = 144$．(5) $|\widetilde{A}| \neq 0$ なので，$\widetilde{A}$ は正則である．$A\widetilde{A} = |A|E_n$ から，$\widetilde{A}^{-1} = \dfrac{1}{|A|}A = -\dfrac{1}{12}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ となる．(6) $A^{-1}\widetilde{A^{-1}} = |A^{-1}|E_n$ であることに注意すれば，$\widetilde{A^{-1}} = |A^{-1}|A = \dfrac{1}{|A|}A = -\dfrac{1}{12}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$．

$\boxed{5}$ (1) $\Delta(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{vmatrix} = (\gamma-\alpha)(\beta-\alpha)(\gamma-\beta)$ である.（直接**例 10.2** を適用してもわかるし，より一般には，たとえば，**教科書 例題 12.3** 参照.）(2) クラメルの公式を適用すると次のように解が求められる．

$$x = \frac{\Delta(d,b,c)}{\Delta(a,b,c)} = \frac{(c-d)(b-d)}{(c-a)(b-a)}, y = \frac{\Delta(a,d,c)}{\Delta(a,b,c)} = \frac{(d-a)(c-d)}{(b-a)(c-b)},$$
$$z = \frac{\Delta(a,b,d)}{\Delta(a,b,c)} = \frac{(d-a)(d-b)}{(c-a)(c-b)}$$