数学演習第一　第10回　「4次以上の行列式」

(2015.7.15 実施)

1 **教科書 p.65 の定義 10.1** に従って，次の行列式を計算せよ．(**演習書 9.3.6(5) の特殊事例．**)

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

2 4 次正方行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & -4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ の行列式を次のそれぞれの方法で求めよ．

(0) **教科書 p.65 の定義 10.1** を適用する．(**絶対にオススメしない!!**)

(1) A に,「1 行目を 2 行目と 3 行目に加える」という行基本変形を施した行列 A_1 に，**教科書 p.65 の定義 10.1** を適用する．

(2) (1) の A_1 に対して，2 行目に関する余因子展開を行う．

(3) (1) の A_1 に対して，3 行目に関する余因子展開を行う．

(4) A に,「2 列目を 3 列目，4 列目にそれぞれ加える」という列基本変形を施した行列 A_2 に対して，1 行目に関する余因子展開を行う．

(5) (4) の A_2 に対して，4 列目に関する余因子展開を行う．

3 次の行列の行列式を求めよ．但し，(2) は因数分解された形で答えること．また (3)(4)(5) はいずれも n 次正方行列とする．(**演習書 9.3.3(3),9.3.6(6) の $x = -1$ の場合**など.)

(1) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 1 & 7 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & -5 & 3 \\ 4 & -3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} a & -a & a & -a \\ -a & 1 & -a & 1 \\ a & -1 & a^2 & -1 \\ -a & 1 & -a^2 & -a \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & & & & -1 \\ -1 & 1 & & & \\ & -1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 1 \end{vmatrix}$　(4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & a \\ 1 & 1 & \cdots & a & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & a & \cdots & 1 & 1 \\ a & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$　(5) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{vmatrix}$

4 行列

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

に対して，以下の行列，行列式を求めよ．

(1)　余因子行列 $\widetilde{A}$　　(2)　行列式 $|A|$

(3)　逆行列 A^{-1}　　(4)　余因子行列の行列式 $|\widetilde{A}|$

(5)　余因子行列の逆行列 $(\widetilde{A})^{-1}$　　(6)　逆行列の余因子行列 $\widetilde{A^{-1}}$

（ヒント：(3)〜(6) は闇雲に成分を計算するのではなく，どんな n 次行列 M に対しても，$M\widetilde{M} = |M|E_n$ が成り立つことに注意して求めることが望ましい．）

5

(1) 次の行列式を因数分解した形で求めよ．

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{vmatrix}$$

(2) a, b, c を相異なる実数とするとき，次の x, y, z に関する連立一次方程式の解をクラメルの公式を用いて求めよ．(**演習書 問題 9.4.3(2)**)

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \end{cases}$$