

数学演習第一 (第 11 回) 微積 : 積分の計算 解答例

2015 年 7 月 22 日 実施分

1 (1)~(4) は基本公式として, 計算方法とともに結果も覚えておこう. 被積分関数は似て非なるものです.

(1) $x = a \tan \theta$ ($|\theta| < \frac{\pi}{2}$) と置く. $\frac{1}{x^2 + a^2} = \frac{\cos^2 \theta}{a^2}$, $dx = \frac{a}{\cos^2 \theta} d\theta$ より, $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \int d\theta = \frac{\theta}{a} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a}$.

(2) 被積分関数を部分分数分解して, $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \int \left(\frac{1}{x - a} - \frac{1}{x + a} \right) dx = \frac{1}{2a} \log \left| \frac{x - a}{x + a} \right|$.

(3) $\sqrt{x^2 + A} = t - x$ と置くと, 両辺を 2 乗することで x^2 が消せて, $x = \frac{t^2 - A}{2t}$ ($= \frac{1}{2} \left(t - \frac{A}{t} \right)$) となる. $dx = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{A}{t^2} \right) dt = \frac{t^2 + A}{2t^2} dt$ だから, $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + A}} = \int \frac{1}{t - \frac{t^2 - A}{2t}} \frac{t^2 + A}{2t^2} dt = \int \frac{dt}{t} = \log |t| = \log |x + \sqrt{x^2 + A}|$.

(4) $x = a \sin \theta$ ($|\theta| < \frac{\pi}{2}$) と置く. $\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{a \cos \theta}$, $dx = a \cos \theta d\theta$ より, $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int d\theta = \theta = \sin^{-1} \frac{x}{a}$.

(5)~(8) では「見えない 1」とのペアで部分積分する方法が有効です.

(5) $\int \sqrt{x^2 + A} dx = \int 1 \sqrt{x^2 + A} dx = x\sqrt{x^2 + A} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + A}} dx$. 最後の項で (分子の次数) \geq (分母の次数) になるので, 次のように割り算する: $\frac{x^2}{\sqrt{x^2 + A}} = \frac{x^2 + A - A}{\sqrt{x^2 + A}} = \sqrt{x^2 + A} - \frac{A}{\sqrt{x^2 + A}}$. 代入して移項すると,

$\int \sqrt{x^2 + A} dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{x^2 + A} + A \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + A}} \right) = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{x^2 + A} + A \log |x + \sqrt{x^2 + A}| \right)$. 最後は (3) から.

(6) (5) と同じ計算手順で, $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \right) = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \sin^{-1} \frac{x}{a} \right)$.

(7) $\int \sin^{-1} x dx = x \sin^{-1} x - \int x (\sin^{-1} x)' dx = x \sin^{-1} x - \int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$. 右辺の被積分関数の分子 x が $(1 - x^2)'$ の定数倍であることに注意する. $\int \sin^{-1} x dx = x \sin^{-1} x + \frac{1}{2} \int \frac{(1 - x^2)'}{\sqrt{1 - x^2}} dx = x \sin^{-1} x + \sqrt{1 - x^2}$.

(8) $\int \tan^{-1} x dx = x \tan^{-1} x - \int \frac{x}{x^2 + 1} dx = x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \int \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1} dx = x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \log(x^2 + 1)$.

2 (1) 部分分数分解によって, $\int \frac{dx}{x^2 + 3x - 4} = \int \frac{dx}{(x - 1)(x + 4)} = \frac{1}{5} \int \left(\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 4} \right) dx = \frac{1}{5} \log \left| \frac{x - 1}{x + 4} \right|$.

(2) **1** (2),(1) を使って, $\int \frac{dx}{(x^2 + 4)(x^2 - 4)} = \frac{1}{8} \int \left(\frac{1}{x^2 - 2^2} - \frac{1}{x^2 + 2^2} \right) dx = \frac{1}{32} \log \left| \frac{x - 2}{x + 2} \right| - \frac{1}{16} \tan^{-1} \frac{x}{2}$.

(3) 被積分関数が (分子の次数) \geq (分母の次数) と頭でっかちなので, $\frac{x^2 + 3}{x^2 + 4} = \frac{x^2 + 4 - 1}{x^2 + 4} = 1 - \frac{1}{x^2 + 4}$ と割り算してから積分する. ここでも **1** (1) が使えて, $\int \frac{x^2 + 3}{x^2 + 4} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2 + 2^2} \right) dx = x - \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{x}{2}$.

(4) やはり, $\frac{2x^3 + 5x}{x^2 + 2} = \frac{2x(x^2 + 2) + x}{x^2 + 2} = 2x + \frac{1}{2} \frac{(x^2 + 2)'}{x^2 + 2}$ と割り算する. (分子の次数)+1=(分母の次数) の場合, 分母の導関数を分子に作るように変形する. $\int \frac{2x^3 + 5x}{x^2 + 2} dx = \int \left(2x + \frac{1}{2} \frac{(x^2 + 2)'}{x^2 + 2} \right) dx = x^2 + \frac{1}{2} \log(x^2 + 2)$.

(5) 被積分関数の分母を $x^4 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$ と因数分解すると, $\frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} = \frac{x^2 + 1}{(x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + \frac{1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \right)$ と分解できる.

ここで, それぞれの分母を $x^2 \pm \sqrt{2}x + 1 = \left(x \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{1}{2}$ と平方完成すると, **1** (1) が使えて, $\int \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx = \frac{1}{2} \left(\int \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2} + \int \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \tan^{-1} \frac{x + \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \tan^{-1} \frac{x - \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\tan^{-1}(\sqrt{2}x + 1) + \tan^{-1}(\sqrt{2}x - 1) \right)$. この場合, 置換 $t = x \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ は (頭の中でいい) 書かなくてよい.

(6) $\frac{1}{x^3 - 8} = \frac{1}{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)} = \frac{a}{x - 2} + \frac{bx + c}{x^2 + 2x + 4}$ となるような定数 a, b, c を求める (このとき, $x^2 + 2x + 4$ の分子は定数ではなく 1 次式). 両辺に $(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$ をかけて整理すると, $1 = (a + b)x^2 + (2a - 2b + c)x + 4a - 2c$.

係数比較で, $a + b = 0$, $2a - 2b + c = 0$, $4a - 2c = 1$ を解いて $a = \frac{1}{12}$, $b = -\frac{1}{12}$, $c = -\frac{1}{3}$ と求まる. よって,
 $\frac{1}{x^3 - 8} = \frac{1}{12(x-2)} - \frac{1}{12} \frac{x+4}{x^2+2x+4}$. 右辺第2項は(分子の次数)+1=(分母の次数)だから, 分子に分母の導関数
 $(x^2+2x+4)' = 2x+2$ を作るように変形する: $\frac{x+4}{x^2+2x+4} = \frac{1}{2} \frac{(2x+2)+6}{x^2+2x+4} = \frac{1}{2} \frac{(x^2+2x+4)'}{x^2+2x+4} + \frac{3}{x^2+2x+4}$.
 すると, $\int \frac{dx}{x^3-8} = \frac{1}{12} \int \frac{dx}{x-2} - \frac{1}{24} \int \frac{(x^2+2x+4)'}{x^2+2x+4} dx - \frac{1}{4} \int \frac{dx}{(x+1)^2+3}$
 $= \frac{1}{12} \log|x-2| - \frac{1}{24} \log(x^2+2x+4) - \frac{1}{4\sqrt{3}} \text{Tan}^{-1} \frac{x+1}{\sqrt{3}}$ と計算出来る.

3 置換積分の問題です. 積分変数を巧く置きかえることによって, **2** のような有理関数の積分に帰着されます.

- (1) $t = \sqrt{x}$ として置換積分する. $dx = 2t dt$ だから, $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = 2 \int \frac{t}{1+t} dt = 2 \int \frac{t+1-1}{t+1} dt = 2 \int \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) dt = 2(t - \log|t+1|) = 2(\sqrt{x} - \log(\sqrt{x}+1))$.
- (2) $t = \sqrt{1-x}$ と置くと, $x = 1-t^2$ であって $dx = -2t dt$. よって, $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x}} = \int \frac{-2t}{(1-t^2)^2 t} dt = -2 \int \left\{ \frac{1}{(t-1)(t+1)} \right\} dt = -2 \int \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) \right\} dt = -\frac{1}{2} \int \left\{ \frac{1}{(t-1)^2} + \frac{1}{(t+1)^2} - \frac{2}{t^2-1} \right\} dt = -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} - \log \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \right) = \frac{t}{t^2-1} + \frac{1}{2} \log \left| \frac{t-1}{t+1} \right| = -\frac{\sqrt{1-x}}{x} + \frac{1}{2} \log \left| \frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}+1} \right|$.
- (3) $\sqrt{x^2+3x-1} = t-x$ と置くと, 両辺を2乗したときに x^2 の項が消えて, $x = \frac{t^2+1}{2t+3}$ と表せる. このとき,
 $dx = \frac{2(t^2+3t-1)}{(2t+3)^2} dt$ となるから, $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+3x-1}} = \int \frac{2t+3}{t^2+1} \frac{1}{t - \frac{t^2+1}{2t+3}} \frac{2(t^2+3t-1)}{(2t+3)^2} dt = 2 \int \frac{dt}{t^2+1} = 2 \text{Tan}^{-1} t = 2 \text{Tan}^{-1}(x + \sqrt{x^2+3x-1})$. 【追記】 $t = \frac{1}{x}$ の置換でも出来る(置換に仕方次第で定数のズレが生じうる).

4 (1) $\int \cos^4 x dx = \int \cos^2 x (1 - \sin^2 x) dx = \int \cos^2 x dx - \int (\sin x \cos x)^2 dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2x) dx - \frac{1}{4} \int \sin^2 2x dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{8} \int (1 - \cos 4x) dx = \frac{3}{8} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x$.

(2) $t = \tan \frac{x}{2}$ の置換は基本です. このとき, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$ は(計算で確認した後に)覚えましょう.
 $\int \frac{dx}{2+\cos x} = \int \frac{1}{2 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt = 2 \int \frac{dt}{t^2+3} = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{Tan}^{-1} \frac{t}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{Tan}^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \tan \frac{x}{2} \right)$.

(3) 被積分関数が $\cos^2 x$ と $\sin^2 x$ の式の場合は, $t = \tan x$ の置換が有効です. このとき, $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$, $\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{1}{1+t^2} dt$ と計算出来るから, $\int \frac{dx}{\cos^2 x + 4 \sin^4 x} = \int \frac{1}{\frac{1}{1+t^2} + \frac{4t^2}{1+t^2}} \frac{1}{1+t^2} dt = \int \frac{dt}{1+4t^2} = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t^2 + (\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{2} \text{Tan}^{-1}(2t) = \frac{1}{2} \text{Tan}^{-1}(2 \tan x)$.

5 (1) $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}} = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{2^2 - (x-1)^2}} = \left[\text{Sin}^{-1} \frac{x-1}{2} \right]_1^2 = \text{Sin}^{-1} \frac{1}{2} - \text{Sin}^{-1} 0 = \frac{\pi}{6}$.

(2) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\text{Sin}^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \text{Sin}^{-1} x \cdot (\text{Sin}^{-1} x)' dx = \left[\frac{1}{2} (\text{Sin}^{-1} x)^2 \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left(\text{Sin}^{-1} \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{\pi^2}{72}$.

(3) $\int_0^{2\sqrt{3}} \text{Tan}^{-1} \frac{x}{2} dx = \left[x \text{Tan}^{-1} \frac{x}{2} \right]_0^{2\sqrt{3}} - \int_0^{2\sqrt{3}} x \left(\text{Tan}^{-1} \frac{x}{2} \right)' dx = 2\sqrt{3} \text{Tan}^{-1} \sqrt{3} - \int_0^{2\sqrt{3}} \frac{x}{2 \left\{ (\frac{x}{2})^2 + 1 \right\}} dx = \frac{2\sqrt{3}}{3} \pi - \int_0^{2\sqrt{3}} \frac{2x}{x^2+4} dx = \frac{2\sqrt{3}}{3} \pi - [\log(x^2+4)]_0^{2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \pi - 2 \log 2$.

(4) $t = \tan \frac{x}{2}$ とおくと, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$ で, 積分区間の対応は次のようになる:

x	$0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$
t	$0 \rightarrow 1$

 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\sin x} = \int_0^1 \frac{1}{2 + \frac{2t}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt = \int_0^1 \frac{dt}{t^2+t+1} = \int_0^1 \frac{dt}{(t+\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\text{Tan}^{-1} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left(t + \frac{1}{2} \right) \right) \right]_0^1$
 $= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\text{Tan}^{-1} \sqrt{3} - \text{Tan}^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.