2015 年度 数学演習第一 期末統一試験 解説

$\boxed{1}$ ［高次導関数の計算］

(1) 厳密には数学的帰納法により，$\left(\dfrac{1}{3-2x}\right)^{(n)} = \boxed{\dfrac{2^n \cdot n!}{(3-2x)^{n+1}}}$.

(2) ライプニッツの公式を使う．

$$(x^2e^{-3x})^{(n)} = x^2(e^{-3x})^{(n)} + n\cdot 2x(e^{-3x})^{(n-1)} + {}_nC_2\cdot 2(e^{-3x})^{(n-2)} = \boxed{(-3)^{n-2}e^{-3x}\{9x^2-6nx+n(n-1)\}}.$$

$\boxed{2}$ ［$x=0$ での 4 次漸近展開］

(3) (1) から $\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = \dfrac{2^n}{3^{n+1}}$ と求まるので，$(a_0,a_1,a_2,a_3,a_4) = \boxed{\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{9},\dfrac{4}{27},\dfrac{8}{81},\dfrac{16}{243}\right)}$.

（別解） $\dfrac{1}{3-2x} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{2}{3}x} = \dfrac{1}{3}\left(1+\dfrac{2}{3}x+\left(\dfrac{2}{3}x\right)^2+\left(\dfrac{2}{3}x\right)^3+\left(\dfrac{2}{3}x\right)^4+o(x^4)\right)$ から求めることもできる．

(4) $e^{-x^2} = 1-x^2+\dfrac{x^4}{2}+o(x^4)$ と $\log(1+x) = x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+o(x^4)$ から

$$\begin{aligned} e^{-x^2}\log(1+x) &= \left(1-x^2+\frac{x^4}{2}\right)\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right)+o(x^4) \\ &= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-x^2\left(x-\frac{x^2}{2}\right)+o(x^4) \\ &= x-\frac{x^2}{2}-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4+o(x^4) \end{aligned}$$

となるので，$(a_0,a_1,a_2,a_3,a_4) = \boxed{\left(0,1,-\dfrac{1}{2},-\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{4}\right)}$.

(5) $\sqrt{1+y} = 1+\dfrac{1}{2}y-\dfrac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}y^2+o(y^2) = 1+\dfrac{1}{2}y-\dfrac{1}{8}y^2+o(y^2)$ と $\cos x = 1-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{24}x^4+o(x^4)$ を合わせると

$$\begin{aligned} \sqrt{\cos x} &= \sqrt{1+\left\{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)\right\}} = 1+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4\right)-\frac{1}{8}\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4\right)^2+o(x^4) \\ &= 1-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{96}x^4+o(x^4) \end{aligned}$$

となるので，$(a_0,a_1,a_2,a_3,a_4) = \boxed{\left(1,0,-\dfrac{1}{4},0,-\dfrac{1}{96}\right)}$.

$\boxed{3}$ ［漸近展開を利用した極限値の計算］

(6) $\sinh x = \dfrac{e^x-e^{-x}}{2} = x+\dfrac{1}{6}x^3+o(x^3)$，$\cosh x = \dfrac{e^x+e^{-x}}{2} = 1+\dfrac{1}{2}x^2+o(x^3)$ であることに注意すると，$\sinh x - x\cosh x = -\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)$．他方，$\mathrm{Tan}^{-1}x = x+o(x)$ だから，$(\mathrm{Tan}^{-1}x)^3 = x^3+o(x^3)$．よって，$\dfrac{\sinh x - x\cosh x}{(\mathrm{Tan}^{-1}x)^3} = \dfrac{-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)}{x^3+o(x^3)}$ $(x\to 0)$．よって求める極限値は$\boxed{-\dfrac{1}{3}}$.

$\boxed{4}$ ［不定積分・定積分の計算］

(7) $\dfrac{4x^2}{4x^2+9} = 1-\dfrac{9}{4x^2+9} = 1-\dfrac{1}{\left(\frac{2}{3}x\right)^2+1}$ だから，$\displaystyle\int\frac{4x^2}{4x^2+9}dx = \boxed{x-\frac{3}{2}\mathrm{Tan}^{-1}\frac{2}{3}x}$.

(8) $\sqrt{x+4} = t$ とおくと，$x = t^2-4$，$\dfrac{dx}{dt} = 2t$．よって

$$\int_5^{12}\frac{dx}{x\sqrt{x+4}} = \int_3^4\frac{2tdt}{(t^2-4)t} = 2\int_3^4\frac{dt}{t^2-4} = \frac{1}{2}\int_3^4\left(\frac{1}{t-2}-\frac{1}{t+2}\right)dt = \frac{1}{2}\left[\log\left|\frac{t-2}{t+2}\right|\right]_3^4 = \boxed{\frac{1}{2}\log\frac{5}{3}}.$$

(9) $t = \tan\dfrac{x}{2}$ とおくと，$\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$，$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{2}{1+t^2}$．よって

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{1+\sin x} = \int_0^{\tan\frac{\pi}{6}}\frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2} = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{2}{(1+t)^2}dt = \left[-\frac{2}{1+t}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{2}{\sqrt{3}+1} = \boxed{\sqrt{3}-1}.$$

(10)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (\mathrm{Sin}^{-1}x)^2 dx &= \int_0^1 (x)'(\mathrm{Sin}^{-1}x)^2 dx = \left[(x)'(\mathrm{Sin}^{-1}x)^2\right]_0^1 - \int_0^1 x\cdot\frac{2\mathrm{Sin}^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}dx \\
&= \frac{\pi^2}{4} - 2\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\cdot \mathrm{Sin}^{-1}x dx = \frac{\pi^2}{4} + 2\int_0^1 (\sqrt{1-x^2})'\cdot \mathrm{Sin}^{-1}x dx \\
&= \frac{\pi^2}{4} + 2\left[(\sqrt{1-x^2})\mathrm{Sin}^{-1}x\right]_0^1 - 2\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{\pi^2}{4} - 2\int_0^1 dx = \boxed{\frac{\pi^2}{4}-2}.
\end{aligned}$$

$\boxed{5}$ ［**逆行列の計算**］

(11)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 3 & -2 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -2 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{array}\right]$$

より，求める逆行列は$\boxed{\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}}$となる．

(12) 与えられた行列は,「第 3 行の-2 倍を第 2 行へ加え，第 1 行と第 4 行を入れ替える」行基本変形を表しているから，逆行列は,「第 3 行の 2 倍を第 2 行へ加え，第 1 行と第 4 行を入れ替える」すなわち，$\boxed{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$である．

$\boxed{6}$ ［**行列式の計算**］

(13) 第 2 列と第 3 列の 3 倍の和が第 1 列であることから行列式の値は$\boxed{0}$.

(14) サラスの公式を直接適用してもよいし，

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \boxed{-6}$$

とすれば，容易に求まる．

(15)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 \\ -5 & 2 & 6 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 3 \\ -4 & -3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 \\ -3 & 3 & 8 & 0 \\ 9 & 2 & 6 & 0 \\ -6 & -4 & -4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 3 & 8 \\ 9 & 2 & 6 \\ -6 & -4 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 3 & 8 \\ 0 & 11 & 30 \\ 0 & -10 & -20 \end{vmatrix} = -3(11\cdot(-20)-(-10)\cdot 30) = \boxed{-240}.$$

(16)

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & a & a & 1 \\ a & a & a & a \\ 1 & a & 1 & a \\ a & a & 1 & 1 \end{vmatrix} &= a\begin{vmatrix} 1 & a & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ a & a & 1 & 1 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} 0 & a-1 & a-1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & a-1 \\ a-1 & a-1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a(a-1)^3\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= a(a-1)^3\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \boxed{-2a(a-1)^3}
\end{aligned}$$

$\boxed{7}$ ［**余因子行列**］

(17) $(-1)^{1+3}|A_{31}| = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = \boxed{6}$.

(18) $A\widetilde{A} = |A|E_n$ より $(\widetilde{A})^{-1} = \dfrac{1}{|A|}A$. また, $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 10$ なので, $(\widetilde{A})^{-1} = \dfrac{1}{10}A = \boxed{\dfrac{1}{10}\begin{bmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}}$.

$\boxed{8}$ ［**クラメルの公式**］

(19)

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 1 & 0 \\ a & 1 & a & 0 \\ 1 & a & 1 & a \\ 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{cc|cc} 1 & a & 1 & 0 \\ a & 1 & a & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & a & 1 \end{array}\right| = \boxed{-(1-a^2)a^2}$$

(20) クラメルの公式から,

$$z = \frac{\left|\begin{array}{cc|cc} 1 & a & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & a & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right|}{|A|} = \frac{(1-a^2)(1-a)}{-(1-a^2)a^2} = \boxed{\frac{a-1}{a^2}}.$$