数学演習第二 演習第 10 回：線形写像の表現行列, 基底変換行列, 表現行列と座標　解答例

$\boxed{1}$ まず逆行列を計算しておく.

$$M_1=[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3],\quad M_1^{-1}=\frac{1}{18}\begin{bmatrix}-5&1&7\\1&7&-5\\7&-5&1\end{bmatrix},\quad M_2=[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2],\quad M_2^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}$$

(1) $M_1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_i$ $(i=1,2,3)$ を解けばよいので，$M_1^{-1}[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3]=\begin{bmatrix}0&7&2\\1&-3&0\\-1&0&-3\end{bmatrix}$ の各列ベクトルが $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3$ の $\mathcal{A}$ に関する座標を与える．(2) $f(\boldsymbol{a}_i)$ の $\mathcal{F}$ に関する座標を求めるには, $M_2\boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{a}_i)$ $(i=1,2,3)$ を解けばよいので，$M_2^{-1}[f(\boldsymbol{a}_1),f(\boldsymbol{a}_2),f(\boldsymbol{a}_3)]=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&0\\2&\frac{3}{2}&1\end{bmatrix}$ であり, これの各列が $f(\boldsymbol{a}_i)$ の $\mathcal{F}$ に関する座標を与えるので，$\mathcal{A},\mathcal{F}$ に関する表現行列は $\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&0\\2&\frac{3}{2}&1\end{bmatrix}$. (3) f の線形性と (1) から，$f(\boldsymbol{b}_1)=f(\boldsymbol{a}_2)-f(\boldsymbol{a}_3)=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, $f(\boldsymbol{b}_2)=7f(\boldsymbol{a}_1)-3f(\boldsymbol{a}_2)=\begin{bmatrix}15\\-4\end{bmatrix}$, $f(\boldsymbol{b}_3)=2f(\boldsymbol{a}_1)-3f(\boldsymbol{a}_3)=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$．これらの $\mathcal{F}$ に関する座標は，$M_2^{-1}\begin{bmatrix}1&15&3\\0&-4&1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&11&4\\1&19&2\end{bmatrix}$ の各列ベクトルになる．よって求める表現行列は，$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&11&4\\1&19&2\end{bmatrix}$．(4) (1) の計算過程から，$[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3]=[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3]\begin{bmatrix}0&7&2\\1&-3&0\\-1&0&-3\end{bmatrix}$ だから，$P=\begin{bmatrix}0&7&2\\1&-3&0\\-1&0&-3\end{bmatrix}$．(5) $[\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2]=[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2]Q$ となる $Q=M_2^{-1}[\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2]=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0\\3&-2\end{bmatrix}$. (6) $C=Q^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&11&4\\1&7&5\end{bmatrix}$. (7) $g(\boldsymbol{v}_1)=\begin{bmatrix}-3\\-8\\17\end{bmatrix}$, $g(\boldsymbol{v}_2)=\begin{bmatrix}1\\0\\-7\end{bmatrix}$．それぞれの $\mathcal{A}$ に関する座標を求めるには，$M_1\boldsymbol{x}=g(\boldsymbol{v}_i)$ $(i=1,2)$ を解けばよい．$M_1^{-1}\begin{bmatrix}-3&1\\-8&0\\17&-7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&-3\\-8&2\\2&0\end{bmatrix}$ の各列が $\mathcal{A}$ に関する座標を与えるので，求める表現行列 $M=\begin{bmatrix}7&-3\\-8&2\\2&0\end{bmatrix}$．(8) $MA=\begin{bmatrix}1&-1&-3\\-4&-1&2\\2&1&0\end{bmatrix}$． (9) $AM=\begin{bmatrix}3&-2\\4&-3\end{bmatrix}$．(10) $\mathbb{R}^3$ の標準基底を $\mathcal{E}_3$，$\mathbb{R}^2$ の標準基底を $\mathcal{E}_2$ とおく．$\mathcal{E}_3$ から $\mathcal{A}$ への基底変換行列が M_1，$\mathcal{E}_2$ から $\mathcal{F}$ への基底変換行列が M_2 であることに注意すると，$\mathcal{E}_3,\mathcal{E}_2$ に関する f の表現行列は，**教科書命題 23.12** より $M_2AM_1^{-1}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}-2&4&4\\-1&-1&-1\end{bmatrix}$．$\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_3$ に関する g の表現行列は定義から直接読み取れて $\begin{bmatrix}-1&-2\\-4&-4\\5&12\end{bmatrix}$．$\mathcal{E}_3$ に関する $g\circ f$ の表現行列は，$\begin{bmatrix}-1&-2\\-4&-4\\5&12\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{6}\begin{bmatrix}-2&4&4\\-1&-1&-1\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2&-1&-1\\6&-6&-6\\-11&4&4\end{bmatrix}$．$\mathcal{E}_2$ に関する $f\circ g$ の表現行列は,

$\dfrac{1}{6}\begin{bmatrix}-2 & 4 & 4\\ -1 & -1 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1 & -2\\ -4 & -4\\ 5 & 12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 6\\ 0 & -1\end{bmatrix}$.

$\boxed{2}$ (1) 表現行列の定義から，$A=\begin{bmatrix}-1 & 3 & -2\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & 3 & -2\\ 1 & -3 & 2\end{bmatrix}$ である．(2) A を簡約化すると $\begin{bmatrix}1 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ となるので，$\dim N(A)=1$ で基底の一例として $\left(\begin{bmatrix}3\\1\\0\end{bmatrix}\right)$ が取れる．$\dim C(A)=2$ で基底の一例として $\left(\begin{bmatrix}-1\\0\\-1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\1\\-2\\2\end{bmatrix}\right)$ が取れる．これを V,W の元として書けば，$\dim\operatorname{Ker}f=1$ で基底として $(3\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)$ が取れ，$\dim\operatorname{Im}f=2$ で基底として $(-\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{b}_3+\boldsymbol{b}_4,-2\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2-2\boldsymbol{b}_3+2\boldsymbol{b}_4)$ が取れる.（なお，$\operatorname{Im}f$ の基底はもう少し簡単に $(-\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{b}_3+\boldsymbol{b}_4,\boldsymbol{b}_2)$ とも取れる.）

$\boxed{3}$ (1) $f(\boldsymbol{e}_1)=\boldsymbol{e}_2, f(\boldsymbol{e}_2)=\boldsymbol{e}_1$ であることから $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$. (2) $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ と $x+y+z=0$ との距離は $\frac{1}{\sqrt{3}}$ である．$x+y+z=0$ の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ を使うと，$f(\boldsymbol{e}_1)=\boldsymbol{e}_1-\frac{2}{\sqrt{3}}\boldsymbol{n}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2-2\boldsymbol{e}_3)$ となる．$f(\boldsymbol{e}_2),f(\boldsymbol{e}_3)$ も同様に考えれば，求める表現行列は，$\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & -2 & -2\\ -2 & 1 & -2\\ -2 & -2 & 1\end{bmatrix}$.（なお，一般に $\boldsymbol{a}$ に直交し，原点を通る平面に関する $\boldsymbol{x}$ の対称点は，$\boldsymbol{x}-\frac{2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}\boldsymbol{a}$ になる．$(\ ,\ )$ は内積.）(3) $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}-a_3y+a_2z\\ a_3x-a_1z\\ -a_2x+a_1y\end{bmatrix}$ であることから，求める表現行列は $\begin{bmatrix}0 & -a_3 & a_2\\ a_3 & 0 & -a_1\\ -a_2 & a_1 & 0\end{bmatrix}$.

$\boxed{4}$ (1) $D(1)=2, D(x)=x-1, D(x^2)=-2x$ より，表現行列は $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$. (2) A を簡約化すると $\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$. $\dim N(A)=1$ で基底として $\left(\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}\right)$ が取れ，$\dim C(A)=2$ で基底として，$\left(\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}\right)$ が取れる．これを $\mathbb{R}[x]_2$ の元に直せば，$\dim\operatorname{Ker}D=1$ で基底として $(1+2x+x^2)$ が取れ，$\dim\operatorname{Im}D=2$ で基底として $(2,x-1)$ が取れる.（あるいはもっと簡単に $(1,x)$ ととっても良い.）(3) $D(1+x)=1+x, D(x+x^2)=-(1+x), D(x^2)=-2(x+x^2)+2x^2$ より，$\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$. $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ への基底変換行列 $P=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$ を用いて，$P^{-1}AP$ と求めてもよい.