2015 数学演習第二 第 12 回「行列と線形変換の固有値，表現行列の対角化」解答例

$\boxed{1}$ (1) $F_A(\lambda)=\det(\lambda E-A)=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & -1\\ 1 & \lambda-4 & -1\\ -2 & 4 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^3-5\lambda^2+8\lambda-4=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$. A の固有値は $\lambda=1,2$. (2) $\lambda=1$ のとき， $E-A=\begin{bmatrix}0 & -2 & -1\\ 1 & -3 & -1\\ -2 & 4 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -3 & -1\\ 0 & -2 & -1\\ 0 & -2 & -1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 1/2\\ 0 & 1 & 1/2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ より, 基本解は $\begin{bmatrix}-1\\ -1\\ 2\end{bmatrix}$.
$\lambda=2$ のとき， $2E-A=\begin{bmatrix}1 & -2 & -1\\ 1 & -2 & -1\\ -2 & 4 & 2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ より, 基本解は $\begin{bmatrix}2\\ 1\\ 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$. (3) $P=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}$ とおいて, $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 2\end{bmatrix}$. (4) $A^n=\left(P\begin{bmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 2\end{bmatrix}P^{-1}\right)^n=P\begin{bmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 2\end{bmatrix}^nP^{-1}=P\begin{bmatrix}1 & & \\ & 2^n & \\ & & 2^n\end{bmatrix}P^{-1}$. ここで $P^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 1\\ -1 & 3 & 1\\ 2 & -4 & -1\end{bmatrix}$ となることから，$A^n=\begin{bmatrix}1 & -2+2^{n+1} & -1+2^n\\ 1-2^n & -2+3\cdot 2^n & -1+2^n\\ -2+2^{n+1} & 4-2^{n+2} & 2-2^n\end{bmatrix}$.

$\boxed{2}$ (1) $F_A(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1\\ -4 & \lambda+1\end{vmatrix}=\lambda^2-\lambda-6=(\lambda-3)(\lambda+2)$. A の固有値は $\lambda=3,-2$. $\lambda=3$ のとき，$3E-A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -4 & 4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ より, 固有ベクトルとして $\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$. $\lambda=-2$ のとき，$-2E-A=\begin{bmatrix}-4 & -1\\ -4 & -1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1/4\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ より, 固有ベクトルとして $\begin{bmatrix}-1\\ 4\end{bmatrix}$. よって $P=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 4\end{bmatrix}$ とおけば，$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}3 & \\ & -2\end{bmatrix}$.

(2) $|\lambda E_3-A|=\begin{vmatrix}\lambda-6 & 3 & 7\\ 1 & \lambda-2 & -1\\ -5 & 3 & \lambda+6\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+1)$ より，固有値は $2,1,-1$. $\lambda=2$ のとき，$\begin{bmatrix}-4 & 3 & 7\\ 1 & 0 & -1\\ -5 & 3 & 8\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0 & 3 & 3\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 3 & 3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$. $\lambda=1$ のとき，$\begin{bmatrix}-5 & 3 & 7\\ 1 & -1 & -1\\ -5 & 3 & 7\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$. $\lambda=-1$ のとき，$\begin{bmatrix}-7 & 3 & 7\\ 1 & -3 & -1\\ -5 & 3 & 5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -3 & -1\\ 0 & -19 & 0\\ 0 & -12 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$. よって，固有値 $2,1,-1$ の固有空間の次元は，それぞれ 1 次元．固有ベクトルとして，$\boldsymbol{p}_2=\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 1\end{bmatrix},\boldsymbol{p}_1=\begin{bmatrix}2\\ 1\\ 1\end{bmatrix},\boldsymbol{p}_{-1}=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$ が取れるので，$P=[\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_{-1}]$ を取れば，$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}2 & & \\ & 1 & \\ & & -1\end{bmatrix}$ となる．

(3) $|\lambda E_3-A|=\begin{vmatrix}\lambda-5 & -6 & 0\\ 1 & \lambda & 0\\ -1 & -2 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda-3)$ より，固有値は $2,3$.

$$\lambda=2\text{ のとき，}\begin{bmatrix}-3 & -6 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ -1 & -2 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\quad \lambda=3\text{ のとき，}\begin{bmatrix}-2 & -6 & 0\\ 1 & 3 & 0\\ -1 & -2 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & -3\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

という簡約化から，固有値 $2,3$ の固有空間の次元は 2 次元と 1 次元．一次独立な固有ベクトルとして，$\boldsymbol{p}_2^{(1)}=\begin{bmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{bmatrix},\boldsymbol{p}_2^{(2)}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix},\boldsymbol{p}_3=\begin{bmatrix}3\\ -1\\ 1\end{bmatrix}$ が取れるので，$P=[\boldsymbol{p}_2^{(1)},\boldsymbol{p}_2^{(2)},\boldsymbol{p}_3]$ と取れば，$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}2 & & \\ & 2 & \\ & & 3\end{bmatrix}$ となる．

(4) $|\lambda E_3-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & 1\\ 1 & \lambda-2 & 0\\ 1 & -1 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$ より，固有値は $1,2$.

$\lambda=1$ のとき，$\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ $\quad\lambda=2$ のとき，$\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

という簡約化から，固有値 $1, 2$ の固有空間はいずれも 1 次元である．したがって固有空間の次元の和が 3 にならないので対角化できない．

(5) $|\lambda E_4 - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & -1 \\ 2 & \lambda & 2 & 0 \\ -3 & -1 & \lambda-3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & \lambda-3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda & 2 & 0 \\ -1 & \lambda-3 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda-3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & \lambda & 2 \\ -3 & -1 & \lambda-3 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda-2)^2$ より，固有値は $1, 2$．$\lambda = 1$ のとき，$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$．$\lambda = 2$ のとき，$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$．よって固有値 $1, 2$ の固有空間はともに 2 次元で，一次独立な固有ベクトルとして，$\boldsymbol{p}_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{p}_1^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{p}_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{p}_2^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ が取れるので，$P = [\boldsymbol{p}_1^{(1)}, \boldsymbol{p}_1^{(2)}, \boldsymbol{p}_2^{(1)}, \boldsymbol{p}_2^{(2)}]$ と取れば，$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{bmatrix}$ となる．

$\boxed{3}$ (1) 表現行列の定義から $\mathcal{A}$ に関する f の表現行列は $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ -6 & 6 & -1 \end{bmatrix}$．$|\lambda E_3 - A| = \begin{vmatrix} \lambda-3 & 4 & 0 \\ 0 & \lambda+2 & 1 \\ 6 & -6 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \lambda^3 - \lambda = \lambda(\lambda-1)(\lambda+1)$．よって線形変換 f の固有値は $0, -1, 1$．$\lambda = 0$ のとき，$\begin{bmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 6 & -6 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$．$\lambda = 1$ のとき，$\begin{bmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$．$\lambda = -1$ のとき，$\begin{bmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 6 & -6 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ という簡約化から固有値 $0, 1, -1$ の固有空間の次元はすべて 1 次元．固有ベクトルとして，$\boldsymbol{p}_0 = \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}, \boldsymbol{p}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{p}_{-1} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ が取れるので，V の基底として $(-4\boldsymbol{a}_1 - 3\boldsymbol{a}_2 + 6\boldsymbol{a}_3, -2\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 + 3\boldsymbol{a}_3, -\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3)$ をとれば，f の表現行列は対角行列となる．

$\boxed{4}$ 標準基底に関する f の表現行列は $\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ と求められるので，これの固有値を求めて対角化してもできる．しかし，ここでは図形的意味を考えよう．平面 $x + y + z = 0$ 上のどんなベクトル $\boldsymbol{v}$ も $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}$ を満たすから，$\boldsymbol{v} \neq 0$ であれば固有値 1 の固有ベクトルである．他方，$x + y + z = 0$ の法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は $f(\boldsymbol{n}) = -\boldsymbol{n}$ を満たすので固有値 -1 の固有ベクトルである．以上のことから，$\mathbb{R}^3$ の基底として，$x + y + z = 0$ 上の 2 つの一次独立なベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ と $\boldsymbol{n}$，たとえば $\left(\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ を取れば，f の表現行列は，$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ と対角行列になる．f の固有値は $1, -1$ である．