

数学演習第二 (演習第2回) 【解答例】

線形・平面の方程式と外積 2015年 10月 14日 実施

1 (1) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -6 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{v} \times \mathbf{u} = -\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix},$
 $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \begin{bmatrix} -6 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ 12 \\ -6 \end{bmatrix}, \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ -6 \end{bmatrix}.$

注意: 外積では結合律は成り立たない!

(2) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 2 - 1 + 8 = 9, \|\mathbf{u}\| = 3, \|\mathbf{v}\| = 3\sqrt{2}.$ また, \mathbf{u}, \mathbf{v} のなす角を θ とすれば,
 $\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} = \frac{9}{3 \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ より, $\theta = \frac{\pi}{4}.$

(3) $p_{ij} = [P]_{ij}, a_i = [\mathbf{a}]_i$ などと表せば,
 $P\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{j=1}^3 p_{ij} a_j \right) b_i = \sum_{1 \leq i, j \leq 3} p_{ij} a_j b_i = \sum_{j=1}^3 a_j \left(\sum_{i=1}^3 [{}^t P]_{ji} b_i \right) = \sum_{j=1}^3 a_j [{}^t P \mathbf{b}]_j = \mathbf{a} \cdot {}^t P \mathbf{b}.$

(4) $\det[\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ を第3列に関して余因子展開し, そのあと外積の定義を用いて,
 $\det[\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}] = c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$
 $= (a_2 b_3 - a_3 b_2) c_1 - (a_1 b_3 - a_3 b_1) c_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) c_3 = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}.$

(5) ① (3) の結果を用いて, $P\mathbf{a} \cdot P\mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot {}^t P P \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}.$ 特に, $\mathbf{b} = \mathbf{a}$ とすれば, $\|P\mathbf{a}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2.$

② 任意の \mathbf{c} に対して, $(P\mathbf{a} \times P\mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \det[P\mathbf{a} \ P\mathbf{b} \ \mathbf{c}] = \det[P\mathbf{a} \ P\mathbf{b} \ P{}^t P \mathbf{c}] = \det(P[\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ P\mathbf{c}])$
 $= (\det P)(\det[\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ P\mathbf{c}]) = \pm \det[\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ P\mathbf{c}] = \pm (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot P\mathbf{c} = \pm P(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}.$

従って, $P\mathbf{a} \times P\mathbf{b} = \pm P(\mathbf{a} \times \mathbf{b}).$

【注】 P は直交行列なので $(\det P)^2 = (\det {}^t P)(\det P) = \det {}^t P P = \det E = 1.$ よって, $\det P \in \{\pm 1\}.$ ①より, 直交行列による変換で内積 (従ってベクトルの大きさや角度) は変わらない。しかし, ②より, $\det P = 1$ (例えば原点を通る直線の周りの回転移動) なら, 変換してから外積をとっても外積をとってから変換しても変わらないが, $\det P = -1$ (例えば原点を通る平面に関する対称移動) なら, 向きが逆転してしまう。

2 (1) $\overrightarrow{PQ} = {}^t(-2, 4), \overrightarrow{PR} = {}^t(1, 5)$ より, $(\triangle PQR \text{ の面積}) = \frac{1}{2} |\det[\overrightarrow{PQ} \ \overrightarrow{PR}]| = 7.$

(2) $\overrightarrow{PQ} = {}^t(2, -2, -6), \overrightarrow{PR} = {}^t(-2, -1, 1), \overrightarrow{PS} = {}^t(3, 0, -2)$ より, $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = {}^t(-8, 10, -6)$ となり,

$$(\triangle PQR \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\| = \frac{1}{2} \|{}^t(-8, 10, -6)\| = 5\sqrt{2},$$

$$(\text{四面体 PQRS の体積}) = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}) \cdot \overrightarrow{PS}| = \frac{1}{6} |{}^t(-8, 10, -6) \cdot {}^t(3, 0, -2)| = 2.$$

3 (1) ① 仮定より, $ax+by+cz+d=0$ かつ $ax_0+by_0+cz_0+d=0.$ 差をとり, $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0,$ すなわち $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0.$ よって, \mathbf{a} と $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ は直交する。

② 仮定より, $ax+by+cz+d > 0$ かつ $ax_0+by_0+cz_0+d=0.$ 差をとり, $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0) > 0.$ これより, \mathbf{a} と $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ のなす角を θ とすれば, $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \cos \theta > 0.$ よって, $\cos \theta > 0$ となり, \mathbf{a} と $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ が鋭角をなす。(これは \mathbf{a} が $ax+by+cz+d > 0$ の側を指していることを意味する。)

③ \mathbf{n} と $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0$ のなす角を θ とすれば, $|\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)| = \|\mathbf{n}\| \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\| \cos \theta = \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\| \cos \theta.$ この量は, ベクトル $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0$ の, 平面の法線方向への正射影の長さを表しているから, 点 \mathbf{x}_1 から平面までの距離 (\mathbf{x}_1 から平面に下ろした垂線の長さ) にほかならない (図を描いてみよ)。このとき,

$$\begin{aligned} |\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)| &= \frac{|\mathbf{a} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)|}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{|a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ &= \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - (ax_0 + by_0 + cz_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \end{aligned}$$

となり, 証明が終わる。

(2) 平面は通る点と法線ベクトルにより決定される。まず、

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ -4 \end{bmatrix}$$

が求める平面の法線ベクトルを与える。よって、平面の方程式は

$$-3(x-1) - 5(y-1) - 4(z-0) = 0. \quad \therefore 3x + 5y + 4z = 8.$$

次に、S からこの平面までの距離 d を求める。(1) に示した公式を用いてもよいが、ここでは再度 d が \overrightarrow{PS} の $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$ への正射影の長さに等しいことに着目して計算する。

$$d = \frac{|\overrightarrow{PS} \cdot (\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR})|}{\|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\|} = \frac{|{}^t(-2, 2, 4) \cdot {}^t(-3, -5, -4)|}{\|{}^t(-3, -5, -4)\|} = \frac{|-20|}{\sqrt{50}} = 2\sqrt{2}.$$

(3) 2 平面の法線ベクトルが $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ であるから、 $\mathbf{p} \times \mathbf{q} = \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \\ -1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -4 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}$ が交線の方向ベクトルとなる。一方、交線と xy 平面との交点は

$$\begin{cases} x + y - 3z = 1 \\ 2x + y + z = -1 \\ z = 0 \end{cases} \text{ を解いて, } (x, y, z) = (-2, 3, 0).$$

よって、交線の方程式は $\frac{x+2}{-4} = \frac{y-3}{7} = z$ ($\Leftrightarrow x = -4t - 2, y = 7t + 3, z = t$).

あるいは、交線上の点は連立 1 次方程式 $\begin{cases} x + y - 3z = 1 \\ 2x + y + z = -1 \end{cases}$ の解であると考えて、基本変形

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 7 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 7 & -3 \end{bmatrix}$$

により、上と同じパラメータ表示を得る。次に、2 平面のなす角 θ ($0 \leq \theta \leq \pi/2$) は 2 平面の法線のなす角に等しいから、

$$\cos \theta = \frac{|\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}|}{\|\mathbf{p}\| \|\mathbf{q}\|} = \frac{0}{\sqrt{11} \sqrt{6}} = 0. \quad \therefore \theta = \frac{\pi}{2}.$$

(4) 直線上の点 $(5t+1, 3t-1, -4t+5)$ を $5x - 4y - 3z = 19$ に代入して、

$$5(5t+1) - 4(3t-1) - 3(-4t+5) = 19. \quad \therefore t = 1.$$

よって、交点は $(6, 2, 1)$ 。次に、直線と平面のなす角を θ ($0 \leq \theta \leq \pi/2$) とすれば、この直線 ($\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$ と平行) と平面の法線 ($\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}$ と平行) のなす角は $(\pi/2) - \theta$ であるから、

$$\sin \theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{p}|}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{p}\|} = \frac{|25|}{5\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2}} = \frac{1}{2}. \quad \therefore \theta = \frac{\pi}{6}.$$

(5) もしこのような直線が存在するならば、与えられた 2 直線との交点は $P(s, -2s-1, 3s+1)$, $Q(2t, -3t+1, 4t+3)$ と表される。また、その方向ベクトルは、2 直線の方向ベクトル $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$ の両方と直交するので $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ で与えられる。よって、 $\overrightarrow{PQ} \parallel \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ (平行) であるから、

$$\begin{bmatrix} -s+2t \\ 2s-3t+2 \\ -3s+4t+2 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad \therefore s = 3, t = 2, k = 1.$$

従って、 $P(3, -7, 10)$, $Q(4, -5, 11)$ となり、求める直線は

$$x = u + 3, y = 2u - 7, z = u + 10 \quad \text{あるいは} \quad x - 3 = \frac{y + 7}{2} = z - 10.$$

(実は、上の 2 点 P, Q 間の距離が 2 直線間の距離 (= 2 直線上にある 2 点間の最短距離) を与える。実際、2 直線は、それぞれ P, Q を通り、 \overrightarrow{PQ} を法線ベクトルとする平面に含まれている。従って、2 直線間の距離はこの平行 2 平面間の距離 $\|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{6}$ で与えられる。)