2015 数学演習第二 第 3 回「ベクトル空間・部分空間」解答例

$\boxed{1}$ (1)(7) は $\mathbf{0}$ が属していないので部分空間ではない．(2) は $\mathbf{0}$ を含み，スカラー倍に関して閉じているが，例えば $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} \in W$ にも関わらずその和 $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \notin W$ なので部分空間ではない．(3) は，$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \in W$ だが，その -1 倍 $\begin{bmatrix}-1\\-1\\-1\end{bmatrix} \notin W$ なので部分空間ではない．(4) は，$\mathbf{0}$ を含み，$x + 2y + z = 0$ のとき $(kx) + 2(ky) + (kx) = 0$ が成り立つからスカラー倍に関して閉じており，さらに $x' + 2y' + z' = 0$ のとき，$(x+x')+2(y+y')+(z+z') = (x+2y+z)+(x'+2y'+z') = 0$ なので和に関しても閉じている．よって部分空間．(5) は，$\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} \in W$ にも関わらずその和 $\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} \notin W$ なので部分空間ではない．(6) も (4) と同じようにしてチェックできるが，(4)(6) はいずれも同次形連立一次方程式の解空間なので部分空間（**教科書 命題 15.4**）．(8) まず $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x - 4y + 3z = 0 \\ x - 3y + 3z = 0 \end{cases}$ は解 $x = y = z = 0$ を持つから，$\mathbf{0} \in W$．また，$\begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ x - 4y + 3z = b \\ x - 3y + 3z = c \end{cases}$ が解 $x = x_0, y = y_0, z = z_0$ を持つとき，$x = kx_0, y = ky_0, z = kz_0$ とすれば $\begin{cases} x + 2y + 3z = ka \\ x - 4y + 3z = kb \\ x - 3y + 3z = kc \end{cases}$ の解になる．つまり $\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix} \in W$ のとき，$\begin{bmatrix}ka\\kb\\kc\end{bmatrix} \in W$ となるから，スカラー倍に関して閉じている．さらに，$\begin{cases} x + 2y + 3z = a' \\ x - 4y + 3z = b' \\ x - 3y + 3z = c' \end{cases}$ が解 $x = x_1, y = y_1, z = z_1$ を持つとき，$x = x_0 + x_1, y = y_0 + y_1, z = z_0 + z_1$ とすれば $\begin{cases} x + 2y + 3z = a + a' \\ x - 4y + 3z = b + b' \\ x - 3y + 3z = c + c' \end{cases}$ の解になる．つまり，つまり $\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}a'\\b'\\c'\end{bmatrix} \in W$ のとき，$\begin{bmatrix}a+a'\\b+b'\\c+c'\end{bmatrix} \in W$ となるから，和に関して閉じている．よって W は部分空間.

$\boxed{2}$ (1) $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & -4 \\ 2 & 4 & 4 & -8 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right]$ より，$\boldsymbol{v} \notin W$．$\boldsymbol{w} \in W$．(2) $\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -3 & 4 & -4 \\ -1 & 5 & -4 & 3 & 3 \\ 3 & -7 & 4 & -1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -3 & 4 & -4 \\ 0 & 7 & -7 & 7 & -1 \\ 0 & -13 & 13 & -13 & 13 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -3 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right]$ より $\boldsymbol{v} \in W$．$\boldsymbol{w} \notin W$．(4) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 4 & 9 \\ 3 & 2 & -7 & -5 \\ -2 & 3 & -6 & -7 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 7 & 6 \\ 0 & -4 & 2 & -14 \\ 0 & 7 & -12 & -1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 7 & 6 \\ 0 & -4 & 2 & -14 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & -15 \\ 0 & -4 & 0 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ より $\boldsymbol{v} \in W$．(5) $\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -5 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 7 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 7 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 9 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 7 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 7 & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 27 & 27 & -7 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \end{array}\right]$ より，$\boldsymbol{v} \notin W$.

$\boxed{3}$ (1) W_1 は $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$ を方向ベクトルとする直線，すなわち $y = 3x$．同様に W_2 は $\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}$ を方向ベクトルとする直線 $y = -\dfrac{1}{2}x$．共通部分は $\{\mathbf{0}\}$．和集合はこの 2 つの直線全体である．$\boldsymbol{v}_1 \in W_1, \boldsymbol{v}_2 \in W_2$ の和 $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix}-1\\4\end{bmatrix} \notin W_i\ (i = 1, 2)$ だから $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \notin W_1 \cup W_2$．つまり $W_1 \cup W_2$ は $\mathbb{R}^2$ の部分空間ではない．平面上のベクトル $\begin{bmatrix}p\\q\end{bmatrix}$ に対して，$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix}p\\q\end{bmatrix}$ となる c_1, c_2 は，$\begin{bmatrix}1 & -2\\3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}p\\q\end{bmatrix}$ の解なので，$\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -2\\3 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}p\\q\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{p+2q}{7}\\ \frac{-3p+q}{7}\end{bmatrix}$ となる．つまりどんなベクトル $\begin{bmatrix}p\\q\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ も，$\dfrac{p+2q}{7}\boldsymbol{v}_1 + \dfrac{-3p+q}{7}\boldsymbol{v}_2$

と表せるので，和空間 W_1+W_2 に属する．よって $W_1+W_2=\mathbb{R}^2$ である．(図示はいずれも省略．)

(2) $\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \in W_2$ となるための条件は，$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & -4 & p \\ 1 & 0 & q \\ 0 & 1 & r \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & q \\ 0 & 1 & r \\ 0 & -4 & p+q \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & q \\ 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & p+q+4r \end{array}\right] \to$ より，$p+q+4r=0$ である．これは W_1 が平面 $x+y+4z=0$ であることを意味している．図形的に見ると，W_1 に属する元は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ を用いて $c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2$ と表される元全体なので，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ と直交するベクトルすなわち外積ベクトル $\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ と直交している．ここからも W_1 は平面 $x+y+4z=0$ とわかる．同様に $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & p \\ -3 & 4 & q \\ 0 & 1 & r \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & q \\ 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 3p+q-4r \end{array}\right]$ より，W_2 は平面 $3x+y-4z=0$ となる．これは $\boldsymbol{a}_3 \times \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ に直交する平面である．$W_1 \cap W_2$ は，2 つの平面の共通部分なので，$x+y+4z=0$ と $3x+y-4z=0$ を連立させると，$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -16 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}$ より，$W_1 \cap W_2$ に属する元は $k\begin{bmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{bmatrix}$ (k は実数) と表せる．これは方向ベクトル $\begin{bmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{bmatrix}$ の直線を表す．図形的には $W_1 \cap W_2$ に属する元は，$\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3 \times \boldsymbol{a}_4$ の両方と直交するので，外積ベクトル $(\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2) \times (\boldsymbol{a}_3 \times \boldsymbol{a}_4) = \begin{bmatrix} 8 \\ -16 \\ 2 \end{bmatrix}$ を方向ベクトルとする直線になる．最後に，和空間は $\mathbb{R}^3$ に一致する．なぜなら，$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対し，$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & -4 & 1 & 0 & p \\ 1 & 0 & -3 & 4 & q \\ 0 & 1 & 0 & 1 & r \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 4 & q \\ 0 & 1 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & -2 & 8 & p+q+4r \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -8 & \frac{-3p+q+12r}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -\frac{p+q+4r}{2} \end{array}\right]$ となるので，$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = -\dfrac{3p+q+12r}{2}\boldsymbol{a}_1 + r\boldsymbol{a}_2 - \dfrac{p+q+4r}{2}\boldsymbol{a}_3$ と表せることがわかる．よって $\mathbb{R}^3$ のどんな元も W_1+W_2 に属する．和集合 $W_1 \cup W_2$ が部分空間ではないことは，例えば，平面 $x+y+4z=0$ 上のベクトル $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ と $3x+y-4z=0$ 上のベクトル $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$ の和 $\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}$ が，$x+y+4z=0$ 上にも $3x+y-4z$ 上にもないことからわかる．

$\boxed{4}$ (i) $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & p \\ 2 & 1 & q \\ 1 & 2 & r \\ 4 & 2 & s \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & p \\ 0 & 3 & -2p+q \\ 0 & 3 & -p+r \\ 0 & 6 & -4p+s \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & p \\ 0 & 3 & -2p+q \\ 0 & 0 & p-q+r \\ 0 & 0 & -2q+s \end{array}\right]$ より，(i) $\Leftrightarrow p-q+r=0$ かつ $-2q+s=0$. (ii) $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & p \\ 1 & 1 & q \\ -1 & -2 & r \\ 2 & -1 & s \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & q \\ 0 & -2 & p-2q \\ 0 & -1 & q+r \\ 0 & -3 & -2q+s \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & q \\ 0 & 1 & -q-r \\ 0 & 0 & p-4q-2r \\ 0 & 0 & -5q-3r+s \end{array}\right]$ より，(ii) $\Leftrightarrow p-4q-2r=0$ かつ $-5q-3r+s=0$. (i),(ii) の結果を連立すると (iii) $\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{bmatrix} = \mathbf{0}$. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より，(iii) $\Leftrightarrow \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ (k は実数)．また，$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 & p \\ 2 & 1 & 1 & 1 & q \\ 1 & 2 & -1 & -2 & r \\ 4 & 2 & 2 & -1 & s \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 & p \\ 0 & 3 & -3 & 1 & -2p+q \\ 0 & 3 & -3 & -2 & -p+r \\ 0 & 6 & -6 & -1 & -4p+s \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 & p \\ 0 & 3 & -3 & 1 & -2p+q \\ 0 & 0 & 0 & -3 & p-q+r \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -2q+s \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 & p \\ 0 & 3 & -3 & 1 & -2p+q \\ 0 & 0 & 0 & -3 & p-q+r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -p-q-r+s \end{array}\right]$ より，(iv) $\Leftrightarrow -p-q-r+s=0$.