平成 27 年度 数学演習第二 演習 第４回　微積：偏微分 [1]（偏微分，合成関数の微分）　解答例

2015 年 11 月 4 日 実施分

$\boxed{1}$ $f_x(x,y) := \lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$, $f_y(x,y) := \lim_{k\to 0}\dfrac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k}$ がそれぞれの定義式である．$f\in C^2(D)$ ならば，$f_{xy}(x,y) := (f_x)_y(x,y) = (f_y)_x(x,y) =: f_{yx}(x,y)$ $((x,y)\in D)$ に注意しておく．

(1) $f_x(x,y) = -\dfrac{x}{\sqrt{y^2-x^2}}$, $f_y(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{y^2-x^2}}$ $(|x|<|y|)$. $(y^2-x^2)(f_x)^2 = x^2$ の両辺をそれぞれ x で偏微分すると，$-2x(f_x)^2+2(y^2-x^2)f_x\,f_{xx} = 2x$, $2(y^2-x^2)f_x\,f_{xx} = 2x\{1+(f_x)^2\} = \dfrac{2xy^2}{y^2-x^2}$ より，$f_{xx}(x,y) = \dfrac{xy^2}{(y^2-x^2)^2f_x} = -\dfrac{y^2}{(y^2-x^2)^{3/2}}$ $(|x|<|y|)$ を得る．同様にして，$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = \dfrac{xy}{(y^2-x^2)^{3/2}}$, $f_{yy}(x,y) = -\dfrac{x^2}{(y^2-x^2)^{3/2}}$ $(|x|<|y|)$ がわかる．

(2) $f_x(x,y) = f_{xx}(x,y) = e^x\sin y$ $(= f(x,y))$, $f_y(x,y) = f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = e^x\cos y$, $f_{yy}(x,y) = -e^x\sin y$ $(= -f(x,y))$

(3) $f(x,y) = \dfrac{\log_e y}{\log_e x}$ より，$f_x(x,y) = -\dfrac{\log y}{x(\log x)^2}$, $f_y(x,y) = \dfrac{1}{y\log x}$, $f_{xx}(x,y) = \dfrac{\log y}{x^2(\log x)^2} + \dfrac{2\log y}{x^2(\log x)^3}$, $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -\dfrac{1}{xy(\log x)^2}$, $f_{yy}(x,y) = -\dfrac{1}{y^2\log x}$

(4) $f_x(x,y) = -\dfrac{(x/y)_x}{\sqrt{1-(x/y)^2}} = -\dfrac{|y|}{y\sqrt{y^2-x^2}}$, $f_y(x,y) = -\dfrac{(x/y)_y}{\sqrt{1-(x/y)^2}} = \dfrac{x|y|}{y^2\sqrt{y^2-x^2}}$ $(|x|<|y|)$. $f_{xx}(x,y) = -\dfrac{|y|}{y}\left(\dfrac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}\right)_x = -\dfrac{x|y|}{y(y^2-x^2)^{3/2}}$ を得る．同様にして，$y\neq 0$ より，$|y|/y = \pm 1$ $(y \gtrless 0)$ に注意しておくと，$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = \dfrac{|y|}{(y^2-x^2)^{3/2}}$, $f_{yy}(x,y) = \dfrac{x|y|}{y}\left(\dfrac{1}{y\sqrt{y^2-x^2}}\right)_y = \dfrac{-(y\sqrt{y^2-x^2})_y}{y^2(y^2-x^2)}\dfrac{x|y|}{y} = \dfrac{x|y|(x^2-2y^2)}{y^3(y^2-x^2)^{3/2}}$ $(|x|<|y|)$ を知る．

(5) $(x,y)\neq(0,0)$ のとき，$(x^2+y^2)f = xy(x^2-y^2)$ の両辺をそれぞれ x で偏微分すると，$2xf+(x^2+y^2)f_x = y(x^2-y^2)+2x^2y$, $(x^2+y^2)f_x = \dfrac{\{y(x^2-y^2)+2x^2y\}(x^2+y^2)-2x^2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$ より，$f_x(x,y) = \dfrac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$ が従う．同様にして，$f_y(x,y) = \dfrac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$ も得られる．また，$f_x(0,0) = 0 = f_y(0,0)$ は定義から容易にわかる．次に，$(x,y)\neq(0,0)$ のとき，$(x^2+y^2)^2f_x = y(x^4+4x^2y^2-y^4)$ の両辺をそれぞれ x で偏微分すると，$4x(x^2+y^2)f_x+(x^2+y^2)^2f_{xx} = 4xy(x^2+2y^2)$, $(x^2+y^2)^3f_{xx} = 4xy\{(x^2+2y^2)(x^2+y^2)-(x^4+4x^2y^2-y^4)\}$ より，$f_{xx}(x,y) = \dfrac{4xy^3(3y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^3}$ を得る．同様にして，$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = \dfrac{x^6+9x^4y^2-9x^2y^4-y^6}{(x^2+y^2)^3}$, $f_{yy}(x,y) = -\dfrac{4x^3y(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}$ を知る．そして，$f_x(x,0) = 0 = f_x(0,0)$ から，$f_{xx}(0,0) = 0$ や，$f_y(0,y) = 0 = f_y(0,0)$ より，$f_{yy}(0,0) = 0$ は容易に確かめられる．更に，$f_x(0,y) = -y$ から，$f_{xy}(0,0) = -1$ で，$f_y(x,0) = x$ より，$f_{yx}(0,0) = 1$ が導かれる．よって，$f(x,y)$ は $(0,0)$ の近傍で C^2 級でない．$f\in C^1(\mathbb{R}^2)$ だが，$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_{xx}(x,y)$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_{xy}(x,y)$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_{yy}(x,y)$ はいずれも存在しない (平面の極座標を使えば示せる)．(5) の $f(x,y)$ はイタリアの数学者ペアノ (Giuseppe Peano, 1858–1932) の有名な一例である．

$\boxed{2}$ 合成関数の微分に関する連鎖律 $\dfrac{dg}{dt} = \dfrac{\partial g}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial g}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}$ を適用する解答例を与える．

(1) $f_x(x,y) = \dfrac{(y/x)_x}{1+(y/x)^2} = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $f_y(x,y) = \dfrac{(y/x)_y}{1+(y/x)^2} = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, $\varphi'(t) = 2$, $\psi'(t) = -2t$ より，

$g'(t) = f_x(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t) + f_y(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t) = \dfrac{-(1-t^2)\cdot 2+2t(-2t)}{(2t)^2+(1-t^2)^2} = -\dfrac{2}{t^2+1}$

(実は，$\mathrm{Tan}^{-1}u+\mathrm{Tan}^{-1}(1/u) = \pm\pi/2$ $(u\gtrless 0)$, $\mathrm{Tan}^{-1}\frac{2t}{1-t^2} = \pi+2\,\mathrm{Tan}^{-1}t$ $(t<-1)$, $2\,\mathrm{Tan}^{-1}t$ $(|t|<1)$, $-\pi+2\,\mathrm{Tan}^{-1}t$ $(t>1)$ から，$g(t) = \mathrm{Tan}^{-1}\frac{1-t^2}{2t} = \pm\pi/2-2\,\mathrm{Tan}^{-1}t$ $(t\gtrless 0)$ である.)

(2) $f_x(x,y) = \dfrac{(1+x^2+3y^2)_x}{1+x^2+3y^2} = \dfrac{2x}{1+x^2+3y^2}$, $f_y(x,y) = \dfrac{(1+x^2+3y^2)_y}{1+x^2+3y^2} = \dfrac{6y}{1+x^2+3y^2}$, $\varphi'(t) = 2t$, $\psi'(t) = 3t^2$ より，$g'(t) = \dfrac{2(t^2+1)\times 2t+6(t^3+1)\times 3t^2}{1+(t^2+1)^2+3(t^3+1)^2} = \dfrac{18t^5+4t^3+18t^2+4t}{3t^6+t^4+6t^3+2t^2+5}$

$\boxed{3}$ 合成関数の微分に関する連鎖律 $\dfrac{\partial z}{\partial *} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial *} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial *}$ $(* = u \text{ or } v)$ を適用する解答例を与える．

(1) $f_x(x,y) = -e^{-x}/y$, $f_y(x,y) = -e^{-x}/(y^2)$, $\varphi_u(u,v) = -v/(u^2)$, $\varphi_v(u,v) = 1/u$, $\psi_u(u,v) = 2u$, $\psi_v(u,v) = 2v$ から，$z_u(u,v) = f_x(\varphi(u,v),\psi(u,v))\varphi_u(u,v) + f_y(\varphi(u,v),\psi(u,v))\psi_u(u,v) = -\left\{\dfrac{-v/(u^2)}{u^2+v^2} + \dfrac{2u}{(u^2+v^2)^2}\right\}e^{-v/u} = \dfrac{-2u^3+u^2v+v^3}{u^2(u^2+v^2)^2}e^{-v/u}$, $z_v(u,v) = -\left\{\dfrac{1/u}{u^2+v^2} + \dfrac{2v}{(u^2+v^2)^2}\right\}e^{-v/u} = -\dfrac{(u+v)^2}{u(u^2+v^2)^2}e^{-v/u}$. 尤も，$z(u,v) = \dfrac{e^{-v/u}}{u^2+v^2}$ を u, v でそれぞれ偏微分しても大差はない．連鎖律の本当の価値は $\boxed{4}$ のような具体的に表せない関数の微分にある．

(2) $f_x(x,y) = \dfrac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}$, $f_y(x,y) = -\dfrac{4x^2y}{(x^2+y^2)^2}$, $\varphi_u(u,v) = e^{u+v}$, $\varphi_v(u,v) = e^{u+v}$, $\psi_u(u,v) = e^{u-v}$, $\psi_v(u,v) = -e^{u-v}$ より，$\psi\varphi_u - \varphi\psi_u = \psi\varphi - \varphi\psi = 0$ なので，$z_u(u,v) = \dfrac{4e^{2u}\times 0}{(e^{2u+2v}+e^{2u-2v})^2} = 0$ で，$z_v(u,v) = \dfrac{4e^{2u}\cdot 2e^{2u}}{(e^{2u-2v})^2(e^{4v}+1)^2} = \dfrac{8e^{4v}}{(e^{4v}+1)^2}$ を得る．尤も，$z(u,v) = \dfrac{e^{4v}-1}{e^{4v}+1}$ を u, v でそれぞれ偏微分する方が簡単である．

$\boxed{4}$ (1) $y_v = 0$ ならば，$y(u,v) = y(u,0) + \displaystyle\int_0^v y_v(u,s)\,ds = y(u,0)$ は u だけの関数である．逆に，任意の $h \in C^1(\mathbb{R})$ に対して，$y(u,v) = h(u)$ ならば，$y_v = h_v = 0$ をみたす．

(2) $0 = z_{uv} = (z_u)_v$ のとき，(1) より，或る $h \in C^1(\mathbb{R})$ を用いて，$z_u(u,v) = h(u)$ と書ける．そこで，$f(u) = \displaystyle\int h(u)\,du$ とおくと，$(z-f)_u = z_u - h = 0$ なので，再び (1) から，或る $g \in C^2(\mathbb{R})$ によって，$z(u,v) - f(u) = g(v)$ と表される．逆に，任意の $f, g \in C^2(\mathbb{R})$ に対して，$z = f(u) + g(v)$ は，$z_u = f_u(u)$ より，$z_{uv} = f_{uv} = 0$ をみたす．

(3) $u = x+ct$, $v = x-ct$ より，$w(t,x) = z(x+ct, x-ct)$ であるから，$w_x = z_u u_x + z_v v_x = z_u + z_v$, $w_t = z_u u_t + z_v v_t = c(z_u - z_v)$, $w_{xx} = (z_{uu}u_x + z_{uv}v_x) + (z_{vu}u_x + z_{vv}v_x) = z_{uu} + 2z_{uv} + z_{vv}$, $w_{tt} = c\left\{(z_{uu}u_t + z_{uv}v_t) - (z_{vu}u_t + z_{vv}v_t)\right\} = c^2(z_{uu} - 2z_{uv} + z_{vv})$ がわかる．

(4) (3) より，$0 = w_{tt} - c^2 w_{xx} = -4c^2 z_{uv}$ なので，$z_{uv} = 0$ をみたす．よって，(2) から，$w(t,x) = z(u,v) = f(u) + g(v) = f(x+ct) + g(x-ct)$ と表される．

$\boxed{5}$ 一般に，3 種類の極限には論理的な関係はないので，(a) の極限または (b) の極限が存在しないことから，(c) の極限が存在しないとは云えないし，(c) の極限が存在しても，(a) の極限や (b) の極限が存在すると結論付けられない．

(1) $\displaystyle\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to 0} 1 = 1 = \lim_{x\to 0} 1 = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right)$ はよいだろう．(c) の極限を調べるには本問では平面の極座標 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ $(r \geqq 0, 0 \leqq \theta < 2\pi)$ が有効で，このとき $(x,y) \to (0,0)$ は $r \to 0$ と同じなので，恰も（θ をパラメータと見なして）r の 1 変数関数のように扱える．実際，$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とおくと，$f(x,y) = |\cos\theta + \sin\theta| = \sqrt{2}|\sin(\theta + \pi/4)|$ は区間 $[0, \sqrt{2}]$ の任意の値を取り得るから，(c) の極限は存在しない．

(2) $|f(x,y)| \leqq |x| \leqq \sqrt{x^2+y^2}$ なので，はさみうちの原理により，$\displaystyle\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to 0} 0 = 0 = \lim_{x\to 0} x\sin(1/x^2) = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right)$, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ が得られる．

(3) (2) と同様に，$|f(x,y)| \leqq |x|$ $(y \neq 0)$ から，$\displaystyle\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = 0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ がわかる．一方，$x \neq 0$ として，例えば $y = \dfrac{1}{n\pi}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を考えると，$n \to \infty$ ならば，$0 \neq y \to +0$ で，$f(x,y) = (-1)^n x \in \{\pm x\}$ なので，$\displaystyle\lim_{y\to 0} f(x,y)$ は存在しない．よって，(b) の極限も存在しない．

(4) $|f(x,y)| \leqq |x| + |y| \leqq \sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}$ $(xy \neq 0)$ から，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ を得る．また，(3) と同様にして，(a) の極限も (b) の極限も存在しないことがわかる．つまり，例えば，(a) なら，$y \neq 0$ として，$x = \dfrac{1}{\{n + (1/2)\}\pi}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を考え，(b) なら，$x \neq 0$ として，$y = \dfrac{1}{n\pi}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を考えればよい．

補足 $\boxed{1}$ (5) などを回顧すれば，(a) の極限や (b) の極限は自然に現れることがわかる．実際，

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{k\to 0}\left(\lim_{h\to 0}\frac{f(h,k)}{hk}\right) = \lim_{k\to 0}\left(\lim_{h\to 0}\frac{h^2-k^2}{h^2+k^2}\right) = -1$$

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{h\to 0}\left(\lim_{k\to 0}\frac{f(h,k)}{hk}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\lim_{k\to 0}\frac{h^2-k^2}{h^2+k^2}\right) = 1$$

よって，$f(x,y) = xy\,g(x,y)$, $g(tx,ty) = g(x,y)$ $(t \neq 0)$, $g(1,0) \neq g(0,1)$ をみたす g であれば，$f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$ は成り立つ．但し，$g(x,y)$ は $\mathbb{R}^2$ から $(0,0)$ を除いた $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ で定義されていて，$f(0,0) = 0$ とする．