2015 数学演習第二 第 5 回「一次独立・一次従属，基底・次元」解答例

$\boxed{1}$ 与えられたベクトルを左から順に $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots$ とする．(1) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -6 \\ 8 & -2 & -7 \\ 2 & -8 & 17 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 0 & 22 & -55 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より，$\operatorname{rank}[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3] = 2 < 3$ だから，一次従属で，非自明な一次関係式は $\dfrac{3}{2}\boldsymbol{a}_1 + \dfrac{5}{2}\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$.（$3\boldsymbol{a}_1 + 5\boldsymbol{a}_2 + 2\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$ も可.）(2) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 & 1 \\ 5 & 6 & -1 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 5 & 6 & -1 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ より，$\operatorname{rank}[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4] = 3 < 4$ だから，一次従属で，非自明な一次関係式は $\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$.（なお，一般に，$n+1$ 個以上の n 項列ベクトルは必ず一次従属である.）(3) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より，$\operatorname{rank}[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4] = 3 < 4$ だから，一次従属で，非自明な一次関係式は $-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}_1 + \dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{0}$.（$\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 - 2\boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{0}$ も可.）(4) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ より，$\operatorname{rank}[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4] = 4$ だから，一次独立.

$\boxed{2}$ (1) (i) $c_1(-\boldsymbol{v}_1 + 8\boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3) + c_2(3\boldsymbol{v}_1 - 2\boldsymbol{v}_2 - 8\boldsymbol{v}_3) + c_3(-6\boldsymbol{v}_1 - 7\boldsymbol{v}_2 + 17\boldsymbol{v}_3) = \boldsymbol{0}$ とすると，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ で整理すれば，$(-c_1 + 3c_2 - 6c_3)\boldsymbol{v}_1 + (8c_1 - 2c_2 - 7c_3)\boldsymbol{v}_2 + (2c_1 - 8c_2 + 17c_3)\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}$. $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は一次独立だから，$-c_1 + 3c_2 - 6c_3 = 8c_1 - 2c_2 - 7c_3 = 2c_1 - 8c_2 + 17c_3 = 0$. これは連立一次方程式 $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -6 \\ 8 & -2 & -7 \\ 2 & -8 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$ である．$\boxed{1}$(1) でみたように係数行列の簡約行列は $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ だから，この連立一次方程式には，たとえば，$c_1 = \dfrac{3}{2}, c_2 = \dfrac{5}{2}, c_3 = 1$ という非自明な解がある．よって与えられた 3 つのベクトルは一次従属である．非自明な一次関係式は $\dfrac{3}{2}\boldsymbol{a}_1 + \dfrac{5}{2}\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$.（$3\boldsymbol{a}_1 + 5\boldsymbol{a}_2 + 2\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$ も可.）(ii) 同様に考えると $c_1(-\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3 + \boldsymbol{v}_4) + c_2(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3 + \boldsymbol{v}_4) + c_3(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_3 + \boldsymbol{v}_4) + c_4(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3 - \boldsymbol{v}_4) = \boldsymbol{0}$ は連立一次方程式 $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$ と同値．$\boxed{1}$(4) でみたように係数行列の階数は 4 なのでこの連立一次方程式は自明な解のみを持つ．よって与えられたベクトルは一次独立である．(2) 同様に考えると，$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$ は連立一次方程式 $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 4 & -4 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$ と同値．係数行列を簡約化すると $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 4 & -4 & k \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 8 & 5 \\ 0 & -16 & k-8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} \\ 0 & 0 & k+2 \end{bmatrix}$ となる．一次従属であるためには，これの階数が 3 より小さい，つまり $k = -2$. 非自明な一次関係式は $-\dfrac{1}{8}\boldsymbol{a}_1 - \dfrac{5}{8}\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$.（$\boldsymbol{a}_1 + 5\boldsymbol{a}_2 - 8\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$ も可.）

$\boxed{3}$ $\mathbb{R}^n$ の基底は n 個の一次独立な n 項列ベクトルからなる．$(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ が $\mathbb{R}^n$ の基底になるかどうかは**教科書 命題 17.4** にあるように $[\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n]$ が正則行列であるか（行列式が 0 でないか）調べるのが簡単である．これを使えば，$\mathcal{E}$ は個数が 3 より小さいので基底にならず，$\mathcal{G}$ も行列式が 0 なので基底にならな

い．$\mathcal{F}$ は行列式が 2，$\mathcal{H}$ も行列式が 4 になるので，いずれも $\mathbb{R}^3$ の基底となる．

$\boxed{4}$ (1) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 3 \\ -2 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & -8 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 7 & 14 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -14 & -28 & -12 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は一次従属で，非自明な一次関係式 $3\boldsymbol{a}_1 - 2\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$ が成り立つことがわかる．(2) (1) から，$\mathcal{E}$ は基底にならない．他方，非自明な一次関係式を使うと，$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 + c_4\boldsymbol{a}_4 = (c_1 - 3c_3)\boldsymbol{a}_1 + (c_2 + 2c_3)\boldsymbol{a}_2 + c_4\boldsymbol{a}_4$ と書き直せるので，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4$ は W を生成する．同様に考えると $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ はいずれも W を生成することがわかる．$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ のどの 2 つ $\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j$ をとっても $\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_4$ は一次独立であることがチェックできるので，$\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ はいずれも W の基底である． (3) 基底の定義に従って次の 3 つのことをチェックする．(i) $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ が一次独立．(ii) $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ が W に属す．(iii) $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ が W を生成する．まず (i) は，$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 9 \\ -1 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & 7 \\ 3 & -4 & 10 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 14 & -7 \\ -1 & 3 & -4 \\ 0 & 10 & -5 \\ 0 & 5 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より $\mathrm{rank}[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3] = 3$ だから成立．次に (ii) は，$[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4 | \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & 4 & 2 & 9 \\ -2 & -1 & 1 & -1 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 4 & 2 & 0 & 3 & -4 & 10 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & 4 & 2 & 9 \\ 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 14 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -14 & -12 & -13 & -12 & -26 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ より，$\boldsymbol{b}_1 = \dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_4)$，$\boldsymbol{b}_2 = -\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_4$，$\boldsymbol{b}_3 = 2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_4$ とそれぞれ表せることからわかる．(iii) は逆に $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4$ が $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ の一次結合で表せることを示せばよい．これは $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 9 & 1 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & -4 & -2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 7 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & -4 & 10 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 4 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 14 & -7 & -7 & 0 & 7 \\ 0 & 10 & -5 & -5 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & -2 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 4 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ より，$\boldsymbol{a}_1 = -2\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{a}_2 = 6\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2 - 2\boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{a}_4 = -2\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_3$ と表せることからわかる．

［**注意**］：(i) は $U = \langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3 \rangle$ が 3 次元で $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ がその基底であることを意味している．(ii) は $U \subset W$，(iii) は $U \supset W$ を意味している．**教科書 命題 18.6** に注意すれば，(ii),(iii) のどちらか一方が言えれば，(i) と合わせて，$U = W$ であることが言え，$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ が W の基底とわかる．

$\boxed{5}$ (1) W に属する元は $\begin{bmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ と表せるので，$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$ は W を生成する．一次独立であることもすぐにチェックできるので，W の基底である．$\dim W = 2$ となる．(2) 係数行列を簡約化すると $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & 3 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$．$W_1$ の元は $\begin{bmatrix} -3k \\ 0 \\ k \end{bmatrix}$ と表せる．つまり $\left(\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ が W_1 を生成し，(零ベクトルではないので) 一次独立．よって W_1 の基底となる．$\dim W_1 = 1$ である．また，$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 1 & -4 & 3 & b \\ 1 & -3 & 3 & c \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & -6 & 0 & b-a \\ 0 & -5 & 0 & c-a \end{array}\right] \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & 1 & 0 & \frac{a-b}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a+5b-6c}{30} \end{bmatrix}$ より，$W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \middle| \, a + 5b - 6c = 0 \right\}$ となり，その元は $\begin{bmatrix} a \\ b \\ \frac{a+5b}{6} \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{5}{6} \end{bmatrix}$ と表せる．よって $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{5}{6} \end{bmatrix} \right)$ は W_2 を生成し，一次独立であることも簡単にチェックできるので，W_2 の基底である．$\dim W_2 = 2$ となる．基底の一例は $\left(\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} \right)$ としてもよい．