数学演習第二 (演習 第６回) 略解

微積：偏微分 [2] （テーラーの定理, 極値）

2015 年 11 月 18 日 実施

1 次の 2 変数関数のマクローリン展開の公式を利用する

$$\begin{aligned} f(x,y) =& f(0,0)+f_x(0,0)x+f_y(0,0)y+\frac{1}{2}\{f_{xx}(0,0)x^2+2f_{xy}(0,0)xy+f_{yy}(0,0)y^2\} \\ &+\frac{1}{3!}\{f_{xxx}(0,0)x^3+3f_{xxy}(0,0)x^2y+3f_{xyy}(0,0)xy^2+f_{yyy}(0,0)y^3\}+\cdots \end{aligned} \tag{a}$$

(1) $f(x,y)=e^{ax}\sin by$ より,

$$\begin{aligned} &f_x=ae^{ax}\sin by, f_y=be^{ax}\cos by, f_{xx}=a^2e^{ax}\sin by, f_{xy}=abe^{ax}\cos by, f_{yy}=-b^2e^{ax}\sin by, \\ &f_{xxx}=a^3e^{ax}\sin by, f_{xxy}=a^2be^{ax}\cos by, f_{xyy}=-ab^2e^{ax}\sin by, f_{yyy}=-b^3e^{ax}\cos by. \end{aligned}$$

点 $(0,0)$ での値を (a) に代入して,

$$e^{ax}\sin by=by+\frac{1}{2}(2abxy)+\frac{1}{3!}(3a^2bx^2y-b^3y^3)+\cdots=by+abxy+\frac{1}{2}a^2bx^2y-\frac{1}{6}b^3y^3+\cdots$$

【別解】 1 変数のマクローリン展開の公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^2+\frac{1}{3!}f'''(0)x^3+\cdots$$

を利用する．1 変数関数 e^{ax} と $\sin by$ を 3 次の項まで展開して

$$e^{ax}=1+ax+\frac{1}{2}a^2x^2+\frac{1}{3!}a^3x^3+\cdots, \quad \sin by=by-\frac{1}{3!}b^3y^3+\cdots.$$

2 変数多項式として 4 次以上の項を無視して展開し, 上べきの順に並べると

$$e^{ax}\sin by=\left(1+ax+\frac{1}{2}a^2x^2+\frac{1}{3!}a^3x^3+\cdots\right)\left(by-\frac{1}{3!}b^3y^3+\cdots\right)=by+abxy+\frac{1}{2}a^2bx^2y-\frac{1}{6}b^3y^3+\cdots$$

(2) (a) の展開式を利用するのもよいが, 等比級数の公式

$$\frac{1}{1-r}=1+r+r^2+r^3+\cdots \quad (|r|<1)$$

を用いることもできる．4 次以上の項を無視して

$$\begin{aligned} \frac{1}{3+2x-y} =& \frac{1}{3\{1-(\frac{-2x+y}{3})\}}=\frac{1}{3}\left\{1+\left(\frac{-2x+y}{3}\right)+\left(\frac{-2x+y}{3}\right)^2+\left(\frac{-2x+y}{3}\right)^3+\cdots\right\} \\ =& \frac{1}{3}-\frac{2}{9}x+\frac{1}{9}y+\frac{1}{27}(4x^2-4xy+y^2)+\frac{1}{81}(-8x^3+12x^2y-6xy^2+y^3)+\cdots. \end{aligned}$$

(3) (a) の展開式を利用するのもよいが, $\log(1+t)$ の 3 次のマクローリン展開 $\log(1+t)=t-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{3}t^3+\cdots$ に $t=-x+2y$ を代入して,

$$\begin{aligned} \log(1-x+2y) =& (-x+2y)-\frac{1}{2}(-x+2y)^2+\frac{1}{3}(-x+2y)^3+\cdots \\ =& -x+2y-\frac{1}{2}x^2+2xy-2y^2-\frac{1}{3}x^3+2x^2y-4xy^2+\frac{8}{3}y^3+\cdots. \end{aligned}$$

を得る．

【参考】 n 次多項式 $g(x,y)$ が $f(x,y)$ の n 次マクローリン展開であることと

$$f(x,y)=g(x,y)+o\big((\sqrt{x^2+y^2})^n\big) \quad ((x,y)\to(0,0)) \tag{b}$$

が成り立つことは同値である．この事実は, (a) で定義された $f(x,y)$ の n 次マクローリン展開は, (a) を用いなくても, (b) を満たす n 次多項式 $g(x,y)$ を見つけることができれば, $g(x,y)$ が $f(x,y)$ の n 次マクローリン展開となることを示している．これより上の様な (a) を用いないマクローリン展開の導出が許される．

$\boxed{2}$ いずれも $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$, $D(0,0)=0$ となる問題である．ここで

$$D(x,y) := f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - f_{xy}(x,y)^2$$

とおいた．極値の定義が以下のように与えられることに注意して，$f(0,0)$ が極値かどうか判定する．

> $f(a,b)$ が極大値 (または極小値) であるとは，(a,b) に十分近い (a,b) 以外の全ての点で，不等式 $f(x,y) < f(a,b)$ (または $f(x,y) > f(a,b)$) が成り立つときをいう．【注】 この定義において，$<$ ($>$) を $\le$ ($\ge$) で置き換えて，広義の極大値 (広義の極小値) を定義することがある．

(1) $f(x,y)=x^2+y^3$．$x \neq 0$ で $f(x,0)=x^2>0=f(0,0)$ であるが，$y<0$ で $f(0,y)=y^3<0=f(0,0)$．すなわち，$(0,0)$ の近くで $f(x,y)$ は正負の値を取る．よって $f(x,y)$ は $(0,0)$ で極値を取らない．

(2) $f(x,y)=x^2+y^4$．$(x,y)\neq(0,0)$ で $f(x,y)>0=f(0,0)$ となるので，$f(x,y)$ は $(0,0)$ で極小値を取る．

(3) $f(x,y)=x^2-2xy^2+y^4=(x-y^2)^2$．$(x,y)\neq(0,0)$ が $x=y^2$ を満たすとき $f(x,y)=0=f(0,0)$ となるので，$f(x,y)$ は $(0,0)$ で極値を取らない．

(4) $f(x,y)=2x^3+2y^3+x^2+2xy+y^2$．$f(x,y)=2(x+y)(x^2-xy+y^2)+(x+y)^2=(x+y)(2x^2-2xy+2y^2+x+y)$ より $f(x,-x)=0$．よって $f(x,y)$ は $(0,0)$ で極値を取らない．

(5) $f(x,y)=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$．$x\neq 0$ のとき $f(x,x)=2x^4>0=f(0,0)$ であるが，十分小さな y に対して $f(0,y)=y^2(y^2-2)<0$ なので，$f(x,y)$ は $(0,0)$ で極値を取らない．

$\boxed{3}$ 以下の極値を取るための十分条件を利用する $f(x,y)$ が (a,b) の近くで，連続な 2 階偏導関数を持ち，$f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ とする．さらに，$D(x,y)=f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)-f_{xy}(x,y)^2$ とおくとき，

(i) $D(a,b)>0$ のとき，$\begin{cases} f_{xx}(a,b)>0 \Longrightarrow \text{f(a,b)は極小値}, \\ f_{xx}(a,b)<0 \Longrightarrow \text{f(a,b)は極大値}. \end{cases}$ (極値を取るための十分条件)

(ii) $D(a,b)<0$ のとき，$f(a,b)$ は極値でない．

(iii) $D(a,b)=0$ のとき，極値を取ることも取らないこともあり，これだけでは判定できない．($\boxed{2}$参照)

(1) $f(x,y)=x^2-xy+y^2-x-4y$．$\begin{cases} f_x=2x-y-1=0 \\ f_y=-x+2y-4=0 \end{cases}$ を解いて，$(x,y)=(2,3)$ (この点が極値を与える候補)．$f_{xx}=2$, $f_{xy}=-1$, $f_{yy}=2$ より，$D(2,3)=f_{xx}(2,3)f_{yy}(2,3)-f_{xy}(2,3)^2=2\cdot 2-(-1)^2=3>0$．よって，$f(x,y)$ は $(2,3)$ で極小値 $f(2,3)=-7$ を取る．

(2) $f(x,y)=x^4-2x^3+x^2+y^2$．$\begin{cases} f_x=4x^3-6x^2+2x=2x(x-1)(2x-1)=0 \\ f_y=2y=0 \end{cases}$ より $(x,y)=(0,0)$, $(1,0)$, $(1/2,0)$ (この 3 点が極値を与える候補)．$f_{xx}=12x^2-12x+2$, $f_{xy}=0$, $f_{yy}=2$ より，$D(x,y)=f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)-f_{xy}(x,y)^2=4(6x^2-6x+1)$．$D(0,0)=D(1,0)=4>0$, $f_{xx}(0,0)=f_{xx}(1,0)=2>0$ より，$f(x,y)$ は $(0,0)$, $(1,0)$ で極小値 $f(0,0)=f(1,0)=0$ を取る．一方，$D(1/2,0)=-2<0$ より $f(x,y)$ は $(1/2,0)$ では極値を取らない．

(3) $f(x,y)=xy(x+y-1)$．$\begin{cases} f_x=y(2x+y-1)=0 \\ f_y=x(x+2y-1)=0 \end{cases}$ を解いて $(x,y)=(0,0),(1,0),(0,1),(1/3,1/3)$ (この 4 点が極値を与える候補)．$f_{xx}=2y$, $f_{xy}=2x+2y-1$, $f_{yy}=2x$ より，$D(x,y)=f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)-f_{xy}(x,y)^2=4xy-(2x+2y-1)^2$．$D(0,0)=D(1,0)=D(0,1)=-1<0$ より，$f(x,y)$ は $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ で極値を取らない．一方 $D(1/3,1/3)=1/3>0$, $f_{xx}(1/3,1/3)=2/3>0$ より，$f(x,y)$ は $(1/3,1/3)$ で極小値 $f(1/3,1/3)=-1/27$ を取る．

(4) $f(x,y)=2x^3+2y^3+x^2+2xy+y^2$．$\begin{cases} f_x=2(3x^2+x+y)=0 \\ f_y=2(3y^2+x+y)=0 \end{cases}$ を解いて $(x,y)=(0,0),(-2/3,-2/3)$ (この 2 点が極値を与える候補)．まず $\boxed{2}$(4) より，$f(x,y)$ は $(0,0)$ で極値を取らない．次に $f_{xx}=12x+2$, $f_{xy}=2$, $f_{yy}=12y+2$ より，$D(x,y)=f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)-f_{xy}(x,y)^2=(12x+2)(12y+2)-4$．$D(-2/3,-2/3)=32>0$, $f_{xx}(-2/3,-2/3)=-6<0$ より，$f(x,y)$ は $(-2/3,-2/3)$ で極大値 $f(-2/3,-2/3)=16/27$ を取る．

(5) $f(x,y)=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$．$\begin{cases} f_x=4(x^3-x+y)=0 \\ f_y=4(y^3+x-y)=0 \end{cases}$ を解いて $(x,y)=(0,0),(\pm\sqrt{2},\mp\sqrt{2})$ (複号同順) (この 3 点が極値を与える候補)．まず $\boxed{2}$(5) より，$f(x,y)$ は $(0,0)$ で極値を取らない．次に $f_{xx}=4(3x^2-1)$, $f_{xy}=4$, $f_{yy}=4(3y^2-1)$ より，$D(x,y)=16(3x^2-1)(3y^2-1)-16$ より $D(\pm\sqrt{2},\mp\sqrt{2})=384>0$, $f_{xx}(\pm\sqrt{2},\mp\sqrt{2})=20>0$ より，$f(x,y)$ は $(\pm\sqrt{2},\mp\sqrt{2})$ で極小値 $f(\pm\sqrt{2},\mp\sqrt{2})=-8$ を取る．(複号同順)