数学演習第二（第７回）線形：座標，行列の零空間・行空間・列空間，次元定理 解答例

2015 年 11 月 25 日 実施分

※ 基底の選び方は一つとは限らない ことに注意する．

$\boxed{1}$ (1) α,β,γ に関する連立一次方程式 $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+\gamma\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ を解き, $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{E}}=\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ が求める座標.
（これは遠回りに見えるが (3) 参照のこと）

(2) $\boldsymbol{v}=s\boldsymbol{a}_1+t\boldsymbol{a}_2+u\boldsymbol{a}_3=s\begin{bmatrix}1\\3\\5\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}3\\3\\8\end{bmatrix}+u\begin{bmatrix}2\\1\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s+3t+2u\\3s+3t+u\\5s+8t+4u\end{bmatrix}$

(3) (1) と同様, α,β,γ に関する連立一次方程式 $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}1\\3\\5\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}3\\3\\8\end{bmatrix}+\gamma\begin{bmatrix}2\\1\\4\end{bmatrix}$ を解けばよい. $\begin{bmatrix}1&3&2&x\\3&3&1&y\\5&8&4&z\end{bmatrix}$
$\to\begin{bmatrix}1&3&2&x\\0&-6&-5&-3x+y\\0&1&1&2x+y-z\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&4x+4y-3z\\0&1&0&-7x-6y+5z\\0&0&1&9x+7y-6z\end{bmatrix}$ したがって, $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{A}}=\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4x+4y-3z\\-7x-6y+5z\\9x+7y-6z\end{bmatrix}$

(4) $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in V$ より, $x+y-z=0$, すなわち $z=x+y$ に注意して, $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}x\\y\\x+y\end{bmatrix}=y\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}+x\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}=y\boldsymbol{a}_1+x\boldsymbol{a}_2$
より, $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{A}}=\begin{bmatrix}y\\x\end{bmatrix}$.

(5) $\boldsymbol{v}=c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2$ を満たす c_1, c_2 が存在すればよいので, この c_1, c_2 についての連立方程式を解く.
$\begin{bmatrix}2&5&x\\1&3&y\\-4&2&x-6\\3&-1&y+2\end{bmatrix}\to\cdots\to\begin{bmatrix}1&0&3x-5y\\0&1&-x+2y\\0&0&5x-8y-2\\0&0&5x-9y-1\end{bmatrix}\cdots(\star)$. 連立方程式が解を持つためには係数行列と拡大係数行列の階数が等しくなくてはならないので $5x-8y-2=0,\ 5x-9y-1=0$. これを解いて $x=2,\ y=1$. $(\star)$ より $c_1=3x-5y=1,\ c_2=-x+2y=0$ となるので, $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{A}}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$.

$\boxed{2}$ (1)　A_1 を簡約化すると $A_1=\begin{bmatrix}6&3&3\\-4&1&7\\1&2&5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&3\\0&0&0\end{bmatrix}$. $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$ を零空間 $N(A_1)$ の元とすると $x_1-x_3=0,\ x_2+3x_3=0$ より $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=s\begin{bmatrix}1\\-3\\1\end{bmatrix}$ (s は任意定数). 従って $N(A_1)$ の基底として $\left(\begin{bmatrix}1\\-3\\1\end{bmatrix}\right)$ が選べ, 基底が 1 個のベクトルからなるので $\dim N(A_1)=1$. 簡約行列において主成分を含む行ベクトルが行空間 $R(A_1)$ の基底となるので $R(A_1)$ の基底として $\left(\begin{bmatrix}1&0&-1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0&1&3\end{bmatrix}\right)$ が選べ, $\dim R(A_1)=2$. 列空間 $C(A_1)$ の基底を求めるには簡約行列において主成分を含む列ベクトルに対応する元の行列の列ベクトルをとるか, 転置行列 ${}^tA_1$ の行空間の基底を求め, その結果を転置すればよい (教科書 p.132). 前者の場合 $C(A_1)$ の基底として $\left(\begin{bmatrix}6\\-4\\1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix}\right)$ が選べ, 後者の場合 $\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1/2\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0\\1\\1/2\end{bmatrix}\right)$ が選べる. $\dim C(A_1)=2$.

(2)　(1) と同様に求める.

$N(A_2)$ の基底として $\left(\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}2\\-1\\0\\1\end{bmatrix}\right)$, $\dim N(A_2)=2$.

$R(A_2)$ の基底として $\left(\begin{bmatrix}1&0&-1&-2\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0&1&2&1\end{bmatrix}\right)$, $\dim R(A_2)=2$.

$C(A_2)$ の基底として $\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\right)$ または $\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)$, $\dim C(A_2)=2$.

(3)　(1) と同様に求める.

$N(A_3)$ の基底として $\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\0\\3\\-1\end{bmatrix}\right)$, $\dim N(A_3)=2$.

$R(A_3)$ の基底として $\left(\begin{bmatrix}1&0&-1&0&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1&0&0&2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0&0&1&3\end{bmatrix}\right)$, $\dim R(A_3)=3$.

$C(A_3)$ の基底として $\left(\begin{bmatrix}2\\3\\-1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\0\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-1\\1\\0\end{bmatrix}\right)$ または $\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\\-3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\5/2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\5/2\end{bmatrix}\right)$, $\dim C(A_3)=3$.

(4)　$A_4=\begin{bmatrix}1&2\\3&x\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2\\0&x-6\end{bmatrix}\cdots(\star)$. $x=6$ のとき $(\star)=\begin{bmatrix}1&2\\0&0\end{bmatrix}$. よって $N(A_4)$ の基底として $\left(\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}\right)$ が選べ, $\dim N(A_4)=1$. $R(A_4)$ の基底として $\left(\begin{bmatrix}1&2\end{bmatrix}\right)$ が選べ, $\dim R(A_4)=1$. $C(A_4)$ の基底として $\left(\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}\right)$ が選べ, $\dim C(A_4)=1$.

$x\neq 6$ のとき $(\star)\to\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ となるので $N(A_4)=\{\mathbf{0}\}$. 従って $N(A_4)$ の基底は存在せず, $\dim N(A_4)=0$. $R(A_4)$ の基底として $\left(\begin{bmatrix}1&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1\end{bmatrix}\right)$ が選べ, $\dim R(A_4)=2$. $C(A_4)$ の基底として $\left(\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\x\end{bmatrix}\right)$ または $\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)$ が選べ, $\dim C(A_4)=2$.

3 (1) W_1 について，連立一次方程式 $x_1+x_2-3x_3=0,\quad 2x_1-x_2-x_3+x_4=0$ を解く．係数行列を行基本変形によって階段行列にすると，$\begin{bmatrix}1&1&-3&0\\2&-1&-1&1\end{bmatrix}\to\cdots\to\begin{bmatrix}1&0&-4/3&1/3\\0&1&-5/3&-1/3\end{bmatrix}$ となるので，$x_3=3s,\quad x_4=3t$ とおくと $x_1=4s-t,\quad x_2=5s+t$ と表される．よって $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=s\begin{bmatrix}4\\5\\3\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\3\end{bmatrix}$ より，$\left(\begin{bmatrix}4\\5\\3\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\\0\\3\end{bmatrix}\right)$ を基底に選べて，$\dim W_1=2$.

W_2 について，$x_1+x_2+x_3+x_4=0$ を $x_1=-x_2-x_3-x_4$ と変形し，$x_2=s,\quad x_3=t,\quad x_4=u$ とおくと $x_1=-s-t-u$ となる．よって $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=s\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\0\end{bmatrix}+u\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$ より，$\left(\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right)$ を基底に選べて，$\dim W_2=3$.

(2) $W_1\cap W_2$ の点は, 連立一次方程式 $x_1+x_2-3x_3=0,\quad 2x_1-x_2-x_3+x_4=0,\quad x_1+x_2+x_3+x_4=0$ の解である．$\begin{bmatrix}1&1&-3&0\\2&-1&-1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}\to\cdots\to\begin{bmatrix}1&0&0&2/3\\0&1&0&1/12\\0&0&1&1/4\end{bmatrix}$ となり，$x_4=-12s$ とおくと，$x_1=8s,\quad x_2=s,\quad x_3=3s$ となる．よって $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=s\begin{bmatrix}8\\1\\3\\-12\end{bmatrix}$ と表されるので，基底として $\left(\begin{bmatrix}8\\1\\3\\-12\end{bmatrix}\right)$ が選べ，$\dim(W_1\cap W_2)=1$.

(3)$W_1+W_2=\left\langle\begin{bmatrix}4\\5\\3\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\\0\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right\rangle$ だから，$\begin{bmatrix}4&-1&-1&-1&-1\\5&1&1&0&0\\3&0&0&1&0\\0&3&0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&0&-1/12\\0&1&0&0&1/3\\0&0&1&0&1/12\\0&0&0&1&1/4\end{bmatrix}$ よりこの行列の階数は 4．元々この和空間 W_1+W_2 は $\mathbb{R}^4$ の部分空間だったから，$W_1+W_2=\mathbb{R}^4$ なので，$\dim(W_1+W_2)=4$ であり，4 次元の標準基底が選べる．

(4) 次元定理は $\dim(W_1+W_2)=\dim W_1+\dim W_2-\dim(W_1\cap W_2)$ である．上での経緯から $\dim W_1=2$, $\dim W_2=3$, $\dim(W_1\cap W_2)=1$, $\dim(W_1+W_2)=4$ なので，$4=2+3-1$ と，たしかに成り立っている．