数学演習第二（演習第 9 回）【解答例】

微積：偏微分 [3]（陰関数・ラグランジュの未定乗数法）

2015 年 12 月 16 日実施

$\boxed{0}$ 順に $f(x,\varphi(x))=0$, $b=\varphi(a)$, $-\dfrac{f_x(x,\varphi(x))}{f_y(x,\varphi(x))}$. 最後の空欄は ($\varphi(x)$ が微分可能なことを認めれば) 最初の空欄の $f(x,\varphi(x))=0$ の両辺を x で微分して，$f_x(x,\varphi(x))+f_y(x,\varphi(x))\varphi'(x)=0$ から得られる.

$\boxed{1}$ 本問では関係式 $f(x,y)=0$ から x と y は互いに関係があり，$y=\varphi(x)$ を独立変数 x の関数と見なしているので，$y'=\varphi'(x)=0$ とは限らないことに注意しよう.

(1) $2x^2+4xy+3y^2-9=0$ $(y=\varphi(x))$ の両辺を x で微分して $4x+4y+4xy'+6yy'=0$. 整理すると $(2x+3y)y'+2(x+y)=0$ だから $y'=-\dfrac{2(x+y)}{2x+3y}$. 次に y'' を求める際は，y' を直接に微分するよりも，その手前の $(2x+3y)y'+2(x+y)=0$ の両辺を x で微分して, $(2+3y')y'+(2x+3y)y''+2(1+y')=0$ とした方が計算量が少ない．すると, $y''=-\dfrac{2+4y'+3(y')^2}{2x+3y}$ となり, 右辺にすでに求めた $y'=-\dfrac{2(x+y)}{2x+3y}$ を代入して整理すると，次のように y'' が求まる．最後の等号は $f(x,y)=0$ による.

$$y''=-\frac{1}{2x+3y}\left\{2-\frac{8(x+y)}{2x+3y}+12\left(\frac{x+y}{2x+3y}\right)^2\right\}=-\frac{2(2x^2+4xy+3y^2)}{(2x+3y)^3}=-\frac{18}{(2x+3y)^3}$$

次に, 点 $(1,1)$ の周りの陰関数 $y=\varphi(x)$ に対して, $\varphi'(1)=-\dfrac{2(1+1)}{2+3}=-\dfrac{4}{5}$. よって, $(1,1)$ における接線の方程式は $y=-\dfrac{4}{5}(x-1)+1$, すなわち $y=-\dfrac{4}{5}x+\dfrac{9}{5}$.

最後に，$y=\varphi(x)$ の極値を考える．$y'=-\dfrac{2(x+y)}{2x+3y}=0$ より $y=-x$. これを $2x^2+4xy+3y^2-9=0$ に代入して $x^2-9=0$. よって陰関数 $\varphi(x)$ の極値を与える点 (候補) は $(x,y)=(\pm3,\mp3)$. これらを $y'=0$ に注意して，$y''=\varphi''(x)$ の式に代入すると $\varphi''(\pm3)=\pm\dfrac{2}{3}\gtreqless 0$ (複号同順) であるから, $y=\varphi(x)$ は $x=-3$ で極大値 3, $x=3$ で極小値 -3 をとる.

(2) $\log\sqrt{x^2+y^2}-\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{y}{x}=0$ の両辺を x で微分すると ($\log\sqrt{x^2+y^2}=\dfrac{1}{2}\log(x^2+y^2)$ に注意), $\dfrac{1}{2}\dfrac{2x+2yy'}{x^2+y^2}-\dfrac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\dfrac{(xy'-y)}{x^2}=0$ 整理すると $(y-x)y'+(x+y)=0$ となり $y'=\dfrac{x+y}{x-y}$ を得る. さらに, $(y-x)y'+(x+y)=0$ の両辺を x で微分して, $(1-y')y'+(x-y)y''-(1+y')=0$. よって, $y''=\dfrac{(y')^2+1}{x-y}=\dfrac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$. とくに $\varphi'(1)=1$ から, 点 $(1,0)$ における接線の方程式は $y=x-1$.

次に $y=\varphi(x)$ の極値を考える．$y'=\dfrac{x+y}{x-y}=0$ より $y=-x$. これを $\log\sqrt{x^2+y^2}-\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{y}{x}=0$ に代入して, $\log(\sqrt{2}\,|x|)=\mathrm{Tan}^{-1}(-1)=-\dfrac{\pi}{4}$. よって, 陰関数 $y=\varphi(x)$ の極値を与える点 (候補) は $(x,y)=\left(\pm\dfrac{e^{-\pi/4}}{\sqrt{2}},\mp\dfrac{e^{-\pi/4}}{\sqrt{2}}\right)$. この点において $\varphi''\left(\pm\dfrac{e^{-\pi/4}}{\sqrt{2}}\right)=\pm\dfrac{e^{\pi/4}}{\sqrt{2}}\gtreqless 0$ (複号同順) と計算できるから, $\varphi(x)$ は $x=-\dfrac{e^{-\pi/4}}{\sqrt{2}}$ で極大値 $\dfrac{e^{-\pi/4}}{\sqrt{2}}$ をとり, $x=\dfrac{e^{-\pi/4}}{\sqrt{2}}$ で極小値 $-\dfrac{e^{-\pi/4}}{\sqrt{2}}$ をとる.

【補足】曲線 $f(x,y)=0$ は原点に関して対称であり, 極座標 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ を使うと $x>0$ $(-\pi/2<\theta<\pi/2)$ においては $r=e^{\theta}$ (あるいは $\theta=\log r$) と簡潔に表示される．なお, 極座標表示で $r=ae^{b\theta}$ ($a>0, b\neq 0$ は定数) と表される曲線は対数螺線 (あるいは Bernoulli の螺線) と呼ばれる.

(3) $xe^y-y+1=0$ $(y=\varphi(x))$ の両辺を x で微分して $e^y+xe^yy'-y'=e^y-(1-xe^y)y'=0$. $\therefore\ y'=\dfrac{e^y}{1-xe^y}$. 更に, $e^y-(1-xe^y)y'=0$ の両辺を x で微分して $e^yy'+(e^y+xe^yy')y'-(1-xe^y)y''=-(1-xe^y)y''+e^y\{2y'+x(y')^2\}=0$. $\therefore\ y''=\dfrac{e^y\{2y'+x(y')^2\}}{1-xe^y}=\dfrac{e^{2y}(2-xe^y)}{(1-xe^y)^3}$. 最後に, 点 $(-1,0)$ の周りの陰関数 $y=\varphi(x)$ に対して $\varphi'(-1)=1/2$ であるから, $(-1,0)$ における接線の方程式は $y=\dfrac{1}{2}(x+1)$.
ここで，$x=(y-1)e^{-y}$ の変形に注意すると，陰関数 $y=\varphi(x)$ は関数 $x=(y-1)e^{-y}$ の逆関数 $(y\leqq 2, y\geqq 2)$ と見なせる．そこで，y の関数 $x=(y-1)e^{-y}$ の増減を調べることで，その逆関数 $\varphi(x)$ は $x\leqq e^{-2}, y\leqq 2$ の範囲と，$0<x\leqq e^{-2}, y\geqq 2$ の範囲でそれぞれ一意に定まり，$\varphi'(x)>0$

$(x < e^{-2}, y < 2)$, $\varphi'(x) < 0$ $(0 < x < e^{-2}, y > 2)$ となる．よって，$\varphi(x)$ は極値をとらない．

$\boxed{2}$ (1) 微積分学の基本原理を使って，$f(x,\varphi(x)) = 0$ すなわち $-x + \displaystyle\int_0^{\varphi(x)} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = 0$ の両辺を x で微分すると，$-1 + \dfrac{\varphi'(x)}{\sqrt{(1-\varphi(x)^2)(1-k^2\varphi(x)^2)}} = 0$ (合成関数の微分法で $\varphi'(x)$ がかかる点に注意). よって，$\varphi'(x) = \sqrt{(1-\varphi(x)^2)(1-k^2\varphi(x)^2)}$. ここで，$f(0,0) = 0$ より $\varphi(0) = 0$ だから，$\varphi'(0) = 1$ が分かる．よって，曲線 $f(x,y) = 0$ の原点における接線の傾きは 1 だから，その接線は $y = x$.

(2) $\varphi'(x) = \sqrt{(1-\varphi(x)^2)(1-k^2\varphi(x)^2)}$ を x で微分して，

$$\varphi''(x) = \frac{-2(1+k^2)\varphi(x) + 4k^2\varphi(x)^3}{2\sqrt{(1-\varphi(x)^2)(1-k^2\varphi(x)^2)}}\varphi'(x) = -(1+k^2)\varphi(x) + 2k^2\varphi(x)^3$$

だから，$\varphi''(0) = 0$ が分かる．上式をさらに x で微分すると，$\varphi'''(x) = -(1+k^2)\varphi'(x) + 6k^2\varphi(x)^2\varphi'(x)$ だから，$\varphi'''(0) = -(1+k^2)$ である．よって，$\varphi(x)$ の x^3 の項までのマクローリン展開は

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \varphi'(0)x + \frac{\varphi''(0)}{2!}x^2 + \frac{\varphi'''(0)}{3!}x^3 + o(x^3) = x - \frac{1+k^2}{6}x^3 + o(x^3) \quad (x \to 0)$$

$\boxed{3}$ (1) $g_y(a,b) \neq 0$ より陰関数定理で，(a,b) の近くで $g(x,y) = 0$ の陰関数 $y = \varphi(x)$ が $x = a$ を含むある区間で一意的に定まる．このとき，$g(x,\varphi(x)) = 0$ の両辺を x で微分して，$\varphi'(x) = -\dfrac{g_x(x,\varphi(x))}{g_y(x,\varphi(x))}$ である．

(2) $g(x,y) = 0$ の下で $f(x,y)$ は (a,b) で極値をとることから，$h(x) = f(x,\varphi(x))$ とすると，$h'(a) = 0$ であることに注意する．$h(x) = f(x,\varphi(x))$ を x で微分して，$h'(x) = f_x(x,\varphi(x)) + f_y(x,\varphi(x))\varphi'(x)$ となる．ここで (1) で得た $\varphi'(x) = -\dfrac{g_x(x,\varphi(x))}{g_y(x,\varphi(x))}$ を代入すると，$h'(x) = f_x(x,\varphi(x)) - f_y(x,\varphi(x))\dfrac{g_x(x,\varphi(x))}{g_y(x,\varphi(x))}$. ここで $x = a$ とすると，$\varphi(a) = b$, $h'(a) = 0$ より，$f_x(a,b)g_y(a,b) - f_y(a,b)g_x(a,b) = 0$ が分かる．

(3) $F(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$ に対して，$F_\lambda(a,b,\lambda) = -g(a,b) = 0$ は条件から任意の λ に対して成り立つ．そこで，λ を未知数とする連立方程式 $\begin{cases} F_x(a,b,\lambda) = f_x(a,b) - \lambda g_x(a,b) = 0 \\ F_y(a,b,\lambda) = f_y(a,b) - \lambda g_y(a,b) = 0 \end{cases}$ を考えると，(2) より $\lambda^* = \dfrac{f_y(a,b)}{g_y(a,b)} = \dfrac{f_x(a,b)}{g_x(a,b)}$ が方程式をみたすことが分かる．

【補足】(3) より $-\dfrac{f_x(a,b)}{f_y(a,b)} = -\dfrac{g_x(a,b)}{g_y(a,b)} (=: m)$ だが，これは，曲線 $f(x,y) = c$ と曲線 $g(x,y) = 0$ が (a,b) で共通の接線をもち，その傾きが m であることを意味している．

$\boxed{4}$ ラグランジュ乗数法で用いるために $F(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y) = x + 8y - \lambda(x^4 + y^4 - 1)$ として，(x,y,λ) を未知数とする連立方程式 $\begin{cases} F_x(x,y,\lambda) = 0 \\ F_y(x,y,\lambda) = 0 \\ F_\lambda(x,y,\lambda) = 0 \end{cases}$ を解く．この方程式は $\begin{cases} \text{(i)} & 1 - 4\lambda x^3 = 0 \\ \text{(ii)} & 8 - 4\lambda y^3 = 0 \\ \text{(iii)} & x^4 + y^4 = 1 \end{cases}$.

(i), (ii) より λ を消去することで $2x = y$ が分かる．これを (iii) に代入すると $x = \pm a$ $\left(a = \dfrac{1}{17^{\frac{1}{4}}}\ \text{とした}\right)$. よって，$(x,y) = (\pm a, \pm 2a)$ (複号同順) が条件 $g(x,y) = 0$ の下で $f(x,y)$ の極値を与える点の候補である．次に $(a,2a)$ が極値を与える点であるかチェックする．そこで $\boxed{3}$ のプロセスを辿る．$g_y(a,2a) = 4a^3 \neq 0$ より $(a,2a)$ の近くで $g(x,y) = 0$ の陰関数 $y = \varphi(x)$ が定まり，$\varphi(a) = 2a$ と $g(x,\varphi(x)) = x^4 + \varphi(x)^4 - 1 = 0$ を $x = a$ を含むある区間でみたす．この両辺を x で微分して整理すると $4x^3 + 4\varphi(x)^3\varphi'(x) = 0$ となるから，$\varphi'(a) = -\dfrac{a^3}{\varphi(a)^3} = -\dfrac{1}{8}$. さらに，$x^3 + \varphi(x)^3\varphi'(x) = 0$ を x で微分して，$3x^2 + 3\varphi(x)^2\varphi'(x)^2 + \varphi(x)^3\varphi''(x) = 0$. よって，$\varphi''(a) = -3\dfrac{a^2 + \varphi(a)^2\varphi'(a)^2}{\varphi(a)^3} = \cdots = -\dfrac{51}{128a}$ と計算できる．次に，$h(x) = f(x,\varphi(x))$ とすると，$h'(x) = f_x(x,\varphi(x)) + f_y(x,\varphi(x))\varphi'(x) = 1 + 8\varphi'(x)$ ゆえ $h'(a) = 0$ が確認できる．ここで $h''(x) = 8\varphi''(x)$ より $h''(a) = 8\varphi''(a) = -\dfrac{51}{16a} < 0$ だから，点 $(a,2a)$ は条件 $g(x,y) = 0$ の下で (すなわち $y = \varphi(x)$ の下で) $f(x,y)$ (すなわち $f(x,\varphi(x))$) を極大にする点であることが分かる．その極大値は $f(a,2a) = a + 8(2a) = 17a = 17^{\frac{3}{4}}$ である．

条件 $g = 0$ の下で, 点 $(-a,-2a)$ が f の極小値 $f(-a,-2a) = -17^{\frac{3}{4}}$ を与えることは各自で確かめよう．