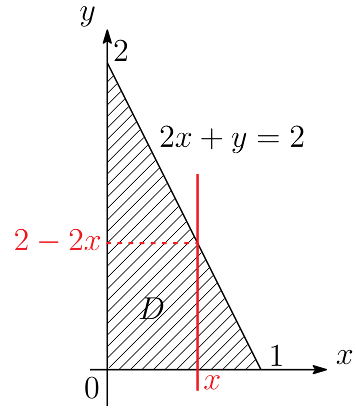
【2015 年度 数学演習第二 期末統一試験 解答例＋解説】

$\boxed{1}$ ［**重積分の計算**］

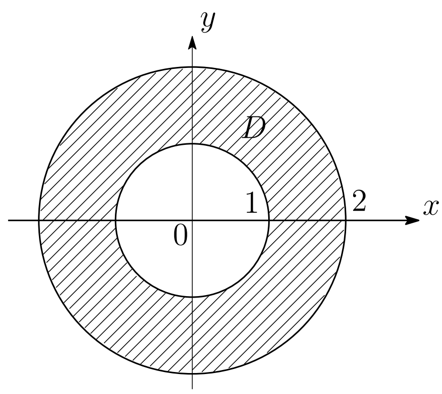
(1)



$$
\begin{aligned}
&\iint_D xydxdy \\
=\ & \int_0^1 dx \int_0^{2-2x} xydy \\
=\ & \int_0^1 \left[\frac{xy^2}{2}\right]_0^{2-2x} dx \\
=\ & \int_0^1 (2x^3 - 4x^2 + 2x)dx = \left[\frac{x^4}{2} - \frac{4}{3}x^3 + x^2\right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{6}}
\end{aligned}
$$

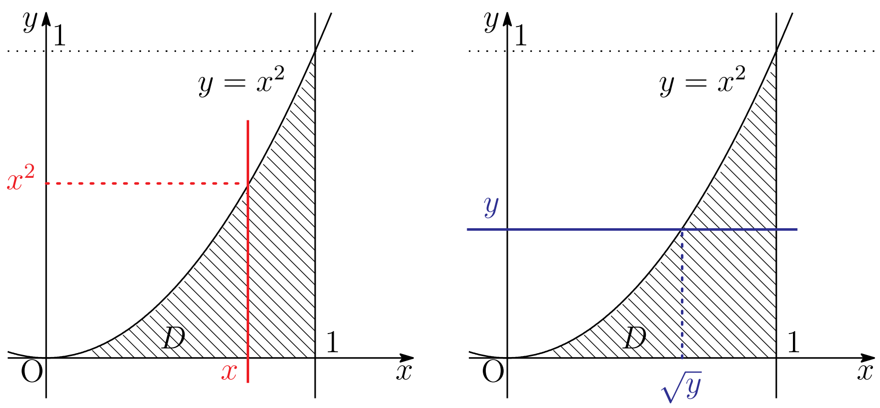
(2) $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ と変数変換すると，D は $E = \{(r,\theta) \mid 1 \leqq r \leqq 2, 0 \leqq \theta \leqq 2\pi\}$ に移るので，

$$
\begin{aligned}
\iint_D (x+y)^2 dxdy &= \iint_E (r\cos\theta + r\sin\theta)^2 r dr d\theta \\
&= \int_1^2 r^3 dr \int_0^{2\pi} (1 + \sin 2\theta) d\theta \\
&= \left[\frac{r^4}{4}\right]_1^2 \cdot \left[\theta - \frac{\cos 2\theta}{2}\right]_0^{2\pi} \\
&= \boxed{\frac{15}{2}\pi}
\end{aligned}
$$



$\boxed{2}$ ［**累次積分の順序交換**］

(3) 下図より，$\displaystyle\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x,y)dy = \int_{\boxed{0}}^{\boxed{1}} dy \int_{\boxed{\sqrt{y}}}^{\boxed{1}} f(x,y)dy.$



(4) $e^{(1-y)^2}$ の y に関する原始関数は初等的には表せないので，(3) を用いて積分順序を交換

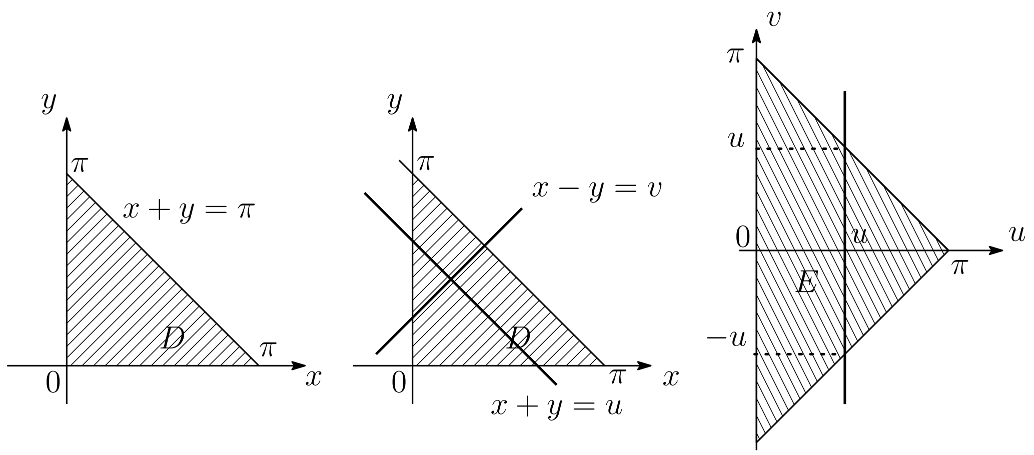
すると，

$$\int_0^1 dx \int_0^{x^2} x e^{(1-y)^2} dy = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^1 x e^{(1-y)^2} dx = \int_0^1 e^{(1-y)^2} \left[\frac{x^2}{2}\right]_{\sqrt{y}}^1 dy$$

$$= \int_0^1 e^{(1-y)^2} \cdot \frac{1-y}{2} dy = \left[-\frac{1}{4} e^{(1-y)^2}\right]_0^1 = \boxed{\frac{e-1}{4}}$$

$\boxed{3}$ ［**重積分の変数変換**］

(5) 下図より，$E = \{(u,v) \mid 0 \leqq u \leqq \pi, \boxed{-u} \leqq v \leqq \boxed{u}\}$.



一般に正則な一次変換は直線を直線に，三角形を三角形に移すことも想起すると良い．また，$u+v = 2x \geqq 0$ かつ $u - v = 2y \geqq 0$ より，$-u \leqq v \leqq u$，と考えてもよい．

変数変換のヤコビアンは，$\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$ だから，$I = \displaystyle\iint_E \boxed{\frac{1}{2} u \cos(v)}\, dudt$.

(6) (5) を用いると

$$I = \int_0^\pi du \int_{-u}^{u} \frac{1}{2} u \cos(v) dt = \int_0^\pi du \int_0^u u \cos(v) dv = \int_0^\pi u \sin(u) du$$

$$= [-u \cos u]_0^\pi + \int_0^\pi \cos u du = \boxed{\pi}$$

$\boxed{4}$ ［**陰関数とラグランジュの未定乗数法**］

(7) $g_x = y^2 - 2xy$，$g_y = 2xy - x^2$ より，$\varphi'(x) = \boxed{\dfrac{2xy - y^2}{2xy - x^2}}$.

(8) (7) に $x = 1, y = -1$ を代入すれば，求める接線の傾きは$\boxed{1}$.

(9) $(2xy - x^2)\varphi'(x) = 2xy - y^2$ の両辺を x の関数とみて微分すると，

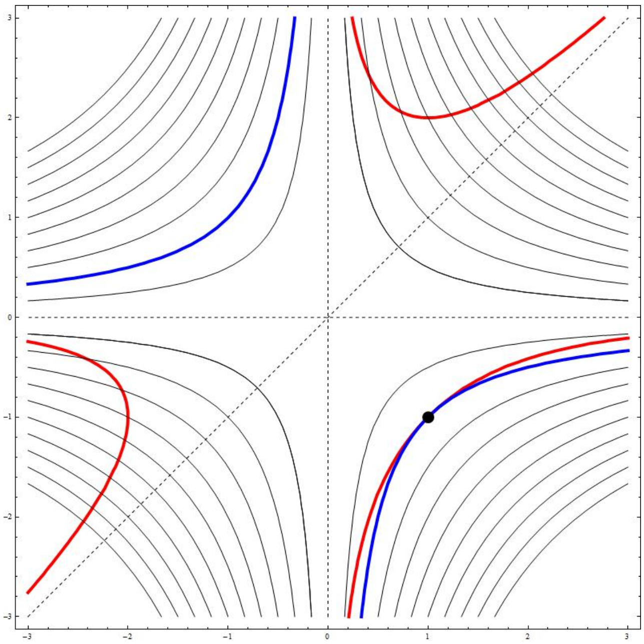
$$(2y + 2xy' - 2x)y' + (2xy - x^2)\varphi''(x) = 2y + 2xy' - 2yy' \quad \cdots (*)$$

そこで (8) から得られる $y' = \varphi'(1) = 1$ と $x = 1, y = -1$ を代入すれば，点 $(1, -1)$ での $\varphi''(1) = \boxed{-\dfrac{4}{3}}$.

(10) ラグランジュの未定乗数法を使うために，$F(x,y,\lambda) = xy - \lambda(xy^2 - x^2y - 2)$ とおく．

$F_x = y(1-\lambda(y-2x))$，$F_y = x(1-\lambda(2y-x))$，$F_\lambda = -(x^2y+xy^2-2)$．$x=0$ のときや $y=0$ のときには，$g(0,y) = g(x,0) = -2 \neq 0$ だから，$1-\lambda(y-2x)=0$ かつ $1-\lambda(2y-x)=0$ のときを考えればよい．これが成り立つには $\lambda = 0$ は不適だから，$y - 2x = \dfrac{1}{\lambda} = 2y - x$．よって $x=-y$．これを $g(x,y)=0$ に代入すると，$g(x,-x) = 2x^3 - 2 = 0$ を解いて $x = 1$．よって $(x,y) = (1,-1)$ が極値の候補になる．

ここで，$g(x,y) = 0$ から定まる陰関数 $y = \varphi(x)$ を取れば，$h(x) = f(x,\varphi(x)) = x\varphi(x)$ の 2 階微分は $h''(x) = (x\varphi(x))'' = 2\varphi'(x) + x\varphi''(x)$ となる．$(x,y) = (1,-1)$ のとき，(9) で $\varphi'(1) = 1, \varphi''(1) = -\dfrac{4}{3}$ と求めていたので，$h''(1) = \dfrac{2}{3} > 0$ である．よって，$g(x,y) = 0$ のもとで $f(x,y)$ は，$\boxed{(x,y) = (1,-1) \text{ で極小値 } -1 \text{ をとる}}$．



赤線が $g(x,y)=0$ を表す．この曲線は，$x=0, y=0, y=x$ という 3 つの漸近線を持ち，3 つの連結成分を持つ曲線になる．
黒線が $xy=k$ の等高線を表す．
青線が $xy=-1$．
黒点が $g(x,y) = 0$ のもとで $f(x,y)$ が極小値を取る点 $(1,-1)$ を表す．

$\boxed{5}$ ［**線形写像の核と像**］

与えられた線形写像 f は，左から行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ -1 & -9 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ を掛ける線形写像である．(11),(12),(13) をまとめて解く．

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & -9 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & -1 & 1 & a \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & -9 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & -2 & a-1 \end{array}\right]$$
$$\to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 9 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & -14 & 7 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{a-1}{4} \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 9 & -3 & -2 & -a \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{a-1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{7a-1}{2} \end{array}\right]$$

と行基本変形すれば，$\operatorname{rank} A = 2$ とわかるので，$\dim \operatorname{Ker} f = 4 - \operatorname{rank} A = \boxed{2}$．$\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rank} A = \boxed{2}$．また，$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{bmatrix} \in \operatorname{Im} f \Leftrightarrow A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{bmatrix}$ が解を持つ．$\Leftrightarrow 7a - 1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{a = \frac{1}{7}}$．

$\boxed{6}$ ［**線形写像の表現行列と基底変換行列**］

(14) 表現行列の定義から，$A = \boxed{\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}}$．

(15) $A \to \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ と簡約化することができるので，A の零空間 $N(A)$ は 1 次元で，$\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}\right)$ を基底に取ることができる．したがって，$\dim \operatorname{Ker} f = 1$ で，その基底として，$\boxed{(\boldsymbol{a}_2 - 2\boldsymbol{a}_3)}$ を取ることができる．

(16) 基底変換行列の定義から，$P = \boxed{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}}$．

(17) 求める表現行列は，$P^{-1}AP$ である．そこで

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

より，$P^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ となることを使うと，

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

$\boxed{7}$ ［**行列の固有値と対角化**］

(18)

$$\begin{aligned} |\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda-2 & -k & 2k \\ 0 & \lambda-8 & 18 \\ 0 & -3 & \lambda+7 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-2)\{(\lambda-8)(\lambda+7)+54\} = (\lambda-2)(\lambda^2-\lambda-2) = (\lambda-2)^2(\lambda+1) \end{aligned}$$

より，A の固有値は，$\boxed{-1, 2}$.

(19) 最小の固有値は -1．そこで

$$-E - A = \begin{bmatrix} -3 & -k & 2k \\ 0 & -9 & 18 \\ 0 & -3 & 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -3 & -k & 2k \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

と簡約化することで，固有値 -1 の固有ベクトルとして，$\boxed{\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}$ が取れる．

(20) 他方，

$$2E - A = \begin{bmatrix} 0 & -k & 2k \\ 0 & -6 & 18 \\ 0 & -3 & 9 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & -k & 2k \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

である．(19) から固有値 -1 の固有空間は 1 次元であるから，A が対角化可能であるためには，固有値 2 の固有空間の次元が 2，従って $\mathrm{rank}(2E - A) = 1$ であることが必要十分である．よって求める条件は $\boxed{k = 0}$.