

数学演習第二 期末統一試験 問題用紙

(2016.2.3 実施)

1 次の重積分の値を求めよ .

(1) $\iint_D xy \, dx dy$ $D : x \geq 0, y \geq 0, 2x + y \leq 2$

(2) $\iint_D (x + y)^2 \, dx dy$ $D : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$

2

(3) 累次積分 $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy$ の積分順序を交換すると $\int_{\text{あ}}^{\text{い}} dy \int_{\text{う}}^{\text{え}} f(x, y) dx$ となる . $\text{あ} \sim \text{え}$ に入る数値や式を解答用紙の所定の欄に記入せよ .

(4) $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} x e^{(1-y)^2} dy$ の値を求めよ .

3 重積分

$$I = \iint_D (x + y) \cos(x - y) dx dy \quad D : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq \pi$$

を考える .

(5) $x + y = u, x - y = v$ と変数変換するとき , D は ,

$$E = \{(u, v) \mid 0 \leq u \leq \pi, \text{あ} \leq v \leq \text{い}\}$$

に移されるので , $I = \iint_E \text{う} \, dudv$ となる . $\text{あ}, \text{い}, \text{う}$ にあてはまる式を u, v のみを用いて表し , 解答用紙の所定の欄に記入せよ .

(6) I の値を求めよ .

4 $g(x, y) = xy(y - x) - 2$ とする . $g(x, y) = 0$ 上の点 $(1, -1)$ のまわりで定義された C^2 級の陰関数を $y = \varphi(x)$ と表す .

(7) $y' = \varphi'(x)$ を x, y を用いて表せ (\pm などを用いず整理された形で答えること)

(8) 点 $(1, -1)$ における曲線 $g(x, y) = 0$ の接線の傾きの値を求めよ .

(9) 点 $(1, -1)$ における $\varphi''(x)$ の値を求めよ .

(10) $f(x, y) = xy$ とする . $g(x, y) = 0$ のもとでの $f(x, y)$ の極値を求めよ . 解答は , 「点 (a, b) において極大値 c をとる」あるいは「点 (a, b) において極小値 c をとる」という形式で述べること .

5 線形写像 $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x + 4y + z + 3w \\ -x - 9y + 3z + 2w \\ 2x + 8y - z + w \end{bmatrix}$$

で定義する .

(11) f の核 $\text{Ker } f$ の次元を求めよ .

(12) f の像 $\text{Im } f$ の次元を求めよ .

(13) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{bmatrix} \in \text{Im } f$ が成り立つ a の値を求めよ .

6 3次元ベクトル空間 V の基底 $\mathcal{A} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ に対し ,

$$f(\mathbf{a}_1) = -\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2, \quad f(\mathbf{a}_2) = 2\mathbf{a}_1 + 4\mathbf{a}_2 - 2\mathbf{a}_3, \quad f(\mathbf{a}_3) = \mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3$$

によって定義される線形写像 $f: V \rightarrow V$ を考える .

(14) 基底 \mathcal{A} に関する f の表現行列を求めよ .

(15) f の核 $\text{Ker } f$ の基底を $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ を用いて一組求めよ . 但し , $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ の係数がすべて整数である元を用いること .

(16)

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_2 - 2\mathbf{a}_3, \quad \mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 - 2\mathbf{a}_3, \quad \mathbf{b}_3 = \mathbf{a}_3$$

によって得られる V の基底を $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ とする . 基底 \mathcal{A} から基底 \mathcal{B} への基底変換行列 P を求めよ .

(17) 基底 \mathcal{B} に関する f の表現行列を求めよ .

7 k を実数とし , 3次行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & k & -2k \\ 0 & 8 & -18 \\ 0 & 3 & -7 \end{bmatrix}$ を考える .

(18) A の固有値をすべて求めよ .

(19) A の最小の固有値に対応する固有ベクトルをひとつ求めよ . 但し , 成分が整数になるものを答えること .

(20) A が対角化可能であるための実数 k の条件を求めよ .