

平成 27 年度 数学演習第二 中間統一試験 問題用紙

2015 年 12 月 2 日実施 (90 分)

- ・ 解答用紙の所定欄に結果のみを記すこと。
- ・ 簡潔な解答になるよう努めること。不十分と判断された解答には得点を与えない。

1 (1) 極限值 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^n y}{x^2 + y^2}$ が存在するような最小の自然数 n の値を求めよ。

2 (2) C^1 級の関数 $f(x, y)$ は $f_x(x, y) = 3x^2y + y^3$, $f_y(x, y) = x^3 + 3xy^2$ をみたすとする。このとき, $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$ に対して合成関数 $g(t) = f(x(t), y(t))$ を考える。 $g(t)$ の導関数 $g'(t)$ に対して $g'(\frac{\pi}{3})$ の値を求めよ。

3 2 変数関数 $z = \text{Tan}^{-1} \frac{y}{x}$ ($x \neq 0$) に対して次の問いに答えよ。

(3) 偏導関数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ を求めよ。

(4) 変数 x, y が $x = u + v$, $y = u - v$ と表されるとき, 偏導関数 $\frac{\partial z}{\partial v}$ を u, v の式で表せ。
(x, y を含まない形で答えよ)

4 2 変数関数 $f(x, y) = x^3 + 3xy + y^3$ に対して次の問いに答えよ。

(5) 偏導関数 $f_x(x, y)$ を求めよ。

(6) $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$ をみたす点 (x, y) をすべて求めよ。

(7) 2 階偏導関数 $f_{yy}(x, y)$ を求めよ。

(8) $f(x, y)$ が極値をとる点の座標とその極値を求めよ。(極大値か極小値かを明記すること)

5 次のそれぞれの 2 変数関数 $f(x, y)$ に対して, $(0, 0)$ における 2 次の項までのマクローリン展開

$$f(x, y) = \underline{c_0 + c_{10}x + c_{01}y + c_{20}x^2 + c_{11}xy + c_{02}y^2} + o(r^2) \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0)$$

を求め, 下線部に相当する部分を解答欄に記せ。

(9) $f(x, y) = e^{-x} \cos(x + 2y)$

(10) $f(x, y) = \text{Tan}^{-1}(x + y + 1)$

6 \mathbb{R}^3 のベクトル $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ k \end{bmatrix}$ について、次の問いに答えよ.

- (11) 外積 $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2$ を求めよ .
- (12) \mathbb{R}^3 の部分空間 $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle$ はある平面を表している. この平面の方程式を求めよ .
- (13) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ が一次従属になるような k の値を求めよ .
- (14) (13) で求めた k の値に対して, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ がみたす非自明な一次関係式をひとつ記せ. ただし, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ の係数がすべて整数であるものを答えること.

7 \mathbb{R}^4 の部分空間 W_1, W_2 を

$$W_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle, \quad W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{array} \right\}$$

によって定めるとき次の問いに答えよ.

(ただし, (16),(17) の基底は整数を成分とする列ベクトルを用いて答えること)

(15) $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ \alpha \end{bmatrix} \in W_1$ をみたすような α の値を求めよ.

- (16) W_2 の基底を一組求めよ.
- (17) $W_1 \cap W_2$ の基底を一組求めよ.
- (18) $W_1 + W_2$ の次元を求めよ.

8 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ -3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ に関する次の問いに答えよ.

- (19) A の零空間 $N(A)$ の基底を一組求めよ . (基底は整数を成分とする列ベクトルを用いて答えること)
- (20) A の列空間 $C(A)$ の次元を求めよ .