平成 27 年度 数学演習第二 演習第 10 回：線形写像の表現行列, 基底変換行列, 表現行列と座標

2016 年 1 月 6 日 実施

$\boxed{1}$ （演習書 12.2.3 他）

次で与えられる $\mathbb{R}^3$ のベクトルを考える．

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_3=\begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix},\ \boldsymbol{b}_1=\begin{bmatrix}-1\\2\\-1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{b}_2=\begin{bmatrix}1\\5\\18\end{bmatrix},\ \boldsymbol{b}_3=\begin{bmatrix}-7\\1\\0\end{bmatrix},$$

(1) $\mathbb{R}^3$ の基底 $\mathcal{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)$ に関する，$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3$ の座標をそれぞれ求めよ．

(2) 線形写像 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ を次で定義する．

$$f(\boldsymbol{a}_1)=\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix},\quad f(\boldsymbol{a}_2)=\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix},\quad f(\boldsymbol{a}_3)=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$$

$\mathbb{R}^2$ の基底 $\mathcal{F}=\left(\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right)$ を考え，$\mathcal{F}$ に関する，$f(\boldsymbol{a}_1),f(\boldsymbol{a}_2),f(\boldsymbol{a}_3)$ の座標を求めることにより，$\mathcal{A},\mathcal{F}$ に関する f の表現行列 A を求めよ．

(3) $\mathbb{R}^3$ の基底 $\mathcal{B}=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)$ について，$\mathcal{B},\mathcal{F}$ に関する f の表現行列 B を求めよ．

(4) $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ への基底変換行列 P を求めよ．

(5) $\mathbb{R}^2$ の基底 $\mathcal{G}=\left(\boldsymbol{w}_1=\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix},\boldsymbol{w}_2=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\right)$ を考える．$\mathcal{F}$ から $\mathcal{G}$ への基底変換行列 Q を求めよ．

(6) $\mathcal{B},\mathcal{G}$ に関する f の表現行列を C とするとき，C を P,P^{-1},A,Q,Q^{-1} の中から必要なものを用いて表すことにより，求めよ．

(7) 線形写像 $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ を

$$g\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-x-2y\\-4x-4y\\5x+12y\end{bmatrix}$$

で定義する．$\mathcal{F},\mathcal{A}$ に関する g の表現行列 M を求めよ．

(8) 合成写像 $g\circ f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ の $\mathcal{A}$ に関する表現行列を求めよ．

(9) 合成写像 $f\circ g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ の $\mathcal{F}$ に関する表現行列を求めよ．

(10) $f,g,g\circ f,f\circ g$ について，標準基底に関する表現行列をそれぞれ求めよ．

$\boxed{1}$ を効率よく計算するためのヒント

拡大係数行列を何度も計算するよりも，$M_1=[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3],M_2=[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2]$ の逆行列を予め計算しておくとよい．ちなみに M_1 の行列式は -18，M_2 の行列式は -2 である．

$\boxed{2}$ (木田雅成『線形代数学講義』問題 VI.15(ii))

ベクトル空間 V の基底 $\mathcal{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ とベクトル空間 W の基底 $\mathcal{B} = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4)$ に対し，線形写像 $f : V \to W$ を

$$f(\boldsymbol{a}_1) = -\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_3 + \boldsymbol{b}_4, \quad f(\boldsymbol{a}_2) = 3\boldsymbol{b}_1 + 3\boldsymbol{b}_3 - 3\boldsymbol{b}_4, \quad f(\boldsymbol{a}_3) = -2\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2 - 2\boldsymbol{b}_3 + 2\boldsymbol{b}_4,$$

で定義する．

(1) $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ に関する f の表現行列 A を求めよ．

(2) A を用いて，$\operatorname{Ker} f$ の次元と基底を一組求めよ．また，$\operatorname{Im} f$ の次元と基底を一組求めよ．

$\boxed{3}$ (演習書 12.2.6(2),12.2.7(4),12.2.8(2))

次の線形変換について，標準基底に関する表現行列を求めよ．

(1) 直線 $y = x$ に関する対称移動の引き起こす $\mathbb{R}^2$ の線形変換．

(2) 平面 $x + y + z = 0$ に関する対称移動の引き起こす $\mathbb{R}^3$ の線形変換．

(3) $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ をひとつ固定したとき，$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x}$ で定まる $\mathbb{R}^3$ の線形変換 f．

$\boxed{4}$

2 次以下の実数係数 1 変数多項式全体のなすベクトル空間を $\mathbb{R}[x]_2$ と表す．
線形変換 $D : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2$ を次で定義する．

$$D(f(x)) = 2f(x) - (x+1)f'(x)$$

(1) $\mathbb{R}[x]_2$ の基底 $\mathcal{A} = (1, x, x^2)$ に関する D の表現行列 A を求めよ．

(2) A を用いて $\operatorname{Ker} D$，$\operatorname{Im} D$ の基底をそれぞれ一組求めよ．

(3) $\mathbb{R}[x]_2$ の別の基底 $\mathcal{B} = (1 + x, x + x^2, x^2)$ に関する D の表現行列を求めよ．

要点（木田雅成『線形代数学講義』p.155, 定義 23.9, 命題 23.12）

V, W がベクトル空間で，$f : V \to W$ が線形写像であるとする．

V の基底 $\mathcal{A} = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n), \mathcal{A}' = (\boldsymbol{v}'_1, \ldots, \boldsymbol{v}'_n)$ と W の基底 $\mathcal{B} = (\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m)$, $\mathcal{B}' = (\boldsymbol{w}'_1, \ldots, \boldsymbol{w}'_m)$ を考える．$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ **に関する** f **の表現行列**とは,

$$(f(\boldsymbol{v}_1), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)) = (\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m)A$$

を満たす $m \times n$ 行列 A のことをいう．$\mathcal{A}$ **から** $\mathcal{A}'$ **への基底変換行列**とは,

$$(\boldsymbol{v}'_1, \ldots, \boldsymbol{v}'_n) = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)P$$

を満たす $n \times n$ 行列 P のことをいう．$\mathcal{A}'$ から $\mathcal{A}$ への基底変換行列は P^{-1} である．さらに, $\mathcal{B}$ から $\mathcal{B}'$ への基底変換行列を Q とするとき，$\mathcal{A}', \mathcal{B}'$ に関する f の表現行列は，上の記号を用いて，$Q^{-1}AP$ と表される．