数学演習第二（第 13 回）微積：重積分 [2]（重積分の変数変換）

2015 年 1 月 27 日 実施

要点：2 重積分 $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ を実行する際, (x,y) から適当な変数 (u,v) に変換した方が計算が楽になることは多い. (u,v) と (x,y) の関係が, 1 対 1 の滑らかな関数 $(x,y)=(x(u,v),y(u,v))$ で与えられていて,

$$\textbf{ヤコビアン}\quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = x_u y_v - x_v y_u$$

が 0 にならないとき,

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_E f(x(u,v),y(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$

が成り立つ. ただし, E は uv 平面の領域. (詳しくは, 微積の教科書 pp.116-117 を参照のこと)

---

1 次の 2 重積分の値を求めよ．但し, $a,b>0$ とする．((3), (4) の変数変換は演習書の問題6.2.2 を参照せよ.)

(1) $I_1 = \iint_D \dfrac{x-y}{1+(x+y)^2}\,dxdy \quad D: |x+y| \leqq 1,\ 0 \leqq x-y \leqq 1$

(2) $I_2 = \iint_D e^{2x+y}\tan(2x-y)\,dxdy \quad D: 0 \leqq 2x+y \leqq \pi,\ 0 \leqq 2x-y \leqq \dfrac{\pi}{3}$

(3) $I_3 = \iint_D \sqrt{xy}\,dxdy \quad D: x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b} \leqq 1$ (問題 6.2.2 (2))

(4) $I_4 = \iint_D xy\,dxdy \quad D: x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ \sqrt{\dfrac{x}{a}}+\sqrt{\dfrac{y}{b}} \leqq 1$ (問題 6.2.2 (3) の一部)

2 次の 2 重積分の値を求めよ．但し，$a,\ b>0$ とする．(演習書 問題6.2.2 参照)

(1) $J_1 = \iint_D e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy \quad D: x^2+y^2 \leqq a^2$ (問題 6.2.2 (5))

(2) $J_2 = \iint_D (x+y)^2\,dxdy \quad D: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} \leqq 1$ (問題 6.2.2 (1) の類題)

(3) $J_3 = \iint_D \log\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy \quad D: a^2 \leqq x^2+y^2 \leqq b^2,\ 0 \leqq y \leqq x\ \ (a<b)$

(4) $J_4 = \iint_D \sqrt{x}y^2\,dxdy \quad D: x^2+y^2 \leqq 2x,\ y \geqq 0$

3 次の部分の体積をそれぞれ求めよ. 但し，$a>0$ とする.

(1) 円柱 $x^2+y^2 \leqq a^2$ の平面 $z=0$ の上方にあり，平面 $z=x$ の下側にある部分. (問題6.4.2 (5))

(2) 円柱 $x^2+y^2 \leqq ax$ と球 $x^2+y^2+z^2 \leqq a^2$ の共通部分.

4 次の 3 重積分の値を求めよ．但し, $0<a<b$ とする.

(1) $K_1 = \iiint_V (x+y)(y+z)(z+x)\,dxdydz \quad V: 0 \leqq x+y \leqq 1,\ \ 0 \leqq y+z \leqq 1,\ \ 0 \leqq z+x \leqq 1$

(2) $K_2 = \iiint_V \dfrac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{p}{2}}} \quad V: a^2 \leqq x^2+y^2+z^2 \leqq b^2$