数学演習第二（演習第２回）

線形：直線・平面の方程式と外積

2015 年 10 月 14 日 実施

1 【内積, 外積】

- 空間のベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ と $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ の**外積** $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix}$ で定義される.

(1) $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ に対して, $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}$, $(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})$ を計算せよ.

(2) 上の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ に対して, $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$, $\|\boldsymbol{u}\|$, $\|\boldsymbol{v}\|$ を計算し, $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ のなす角を求めよ.

(3) 3 次正方行列 $P = [p_{ij}]$ に対して, $P\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot {}^{\mathrm{t}}P\boldsymbol{b}$ が成り立つことを示せ.

(4)* 空間ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を 3 列に並べてできる行列式を $\det[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]$ と表すとき, これを第 3 列に関して余因子展開して $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \det[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]$ が成り立つことを示せ. (この関係式を外積の定義と考えてもよい.)

(5)* 3 次正方行列 P が直交行列 (${}^{\mathrm{t}}PP = E$ なる行列) であるとき, 上の (3), (4) を用いて次を示せ.
① $P\boldsymbol{a} \cdot P\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ (従って $\|P\boldsymbol{a}\| = \|\boldsymbol{a}\|$). ② $P\boldsymbol{a} \times P\boldsymbol{b} = \pm P(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$ ($\pm$ は $\det P$ の符号を表す).

2 【面積, 体積】

- 平面のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して,
  $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の張る平行四辺形の面積 $S = |\det[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}]|$.
- 空間のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ に対して,
  $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の張る平行四辺形の面積 $S = \|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\|$ $\left(= \sqrt{\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2 - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2}\,\right)$,
  $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の張る平行六面体の体積 $V = \left|\det[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]\right|$ $\left(= |(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})|\,\right)$.

(1) $\mathrm{P}(1, -2)$, $\mathrm{Q}(-1, 2)$, $\mathrm{R}(2, 3)$ のとき, $\triangle\mathrm{PQR}$ の面積を求めよ.

(2) $\mathrm{P}(-1, 2, 1)$, $\mathrm{Q}(1, 0, -5)$, $\mathrm{R}(-3, 1, 2)$, $\mathrm{S}(2, 2, -1)$ のとき, $\triangle\mathrm{PQR}$ の面積, および四面体 (三角錐) PQRS の体積を求めよ.

3 【空間内の直線と平面】

- 点 $\boldsymbol{x}_0 = {}^{\mathrm{t}}(x_0, y_0, z_0)$ を通り, $\boldsymbol{a} = {}^{\mathrm{t}}(a, b, c)$ を**方向ベクトル**とする直線の方程式は

$$\underset{\text{(媒介変数表示)}}{\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{a}} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \quad \text{あるいは} \quad \boxed{\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}}.$$

(右の表現は $abc = 0$ のとき破綻するが, 例えば $a = 0, bc \neq 0$ なら, $x = x_0, \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$ と解釈する.)

- 点 $\boldsymbol{x}_0 = {}^{\mathrm{t}}(x_0, y_0, z_0)$ を通り, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ で張られる平面の方程式は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + s\boldsymbol{b} + t\boldsymbol{c}$ (媒介変数表示).
  この平面は $\boldsymbol{p} := \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} = {}^{\mathrm{t}}(a, b, c)$ を**法線ベクトル**とするので, その方程式は

$$\boldsymbol{p} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0 \quad \text{あるいは} \quad \boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0}.$$

(右の表現は通常 $ax + by + cz + d = 0$ または $ax + by + cz = e$ の形に整理する.)

(1)* 平面 $ax + by + cz + d = 0$ 上に定点 $\boldsymbol{x}_0 = {}^{\mathrm{t}}(x_0, y_0, z_0)$ をとる. ① この平面上の任意の点 $\boldsymbol{x} = {}^{\mathrm{t}}(x, y, z)$ に対して, $\boldsymbol{a} = {}^{\mathrm{t}}(a, b, c)$ と $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0$ が直交すること (内積 0) を示せ. ② $ax + by + cz + d > 0$ の範囲にある任意の点 $\boldsymbol{x} = {}^{\mathrm{t}}(x, y, z)$ に対して, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0$ は鋭角をなす (従って $\boldsymbol{a}$ は $ax + by + cz + d > 0$ の側を指している) ことを示せ. ③ 空間内に点 $\boldsymbol{x}_1 = {}^{\mathrm{t}}(x_1, y_1, z_1)$ をとり, $\boldsymbol{a}$ の方向の単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ と $\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0$ との内積の意味を考えて, 点 $\boldsymbol{x}_1$ と平面の距離 (垂線の長さ) が $\dfrac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ であることを示せ.

(2) 3 点 $\mathrm{P}(1, 1, 0)$, $\mathrm{Q}(3, -1, 1)$, $\mathrm{R}(2, -2, 3)$ を通る平面の方程式を求めよ. (まず平面の法線ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \times \overrightarrow{\mathrm{PR}}$ を求めよ.) また, 点 $\mathrm{S}(-1, 3, 4)$ からこの平面までの距離を求めよ.

(3) 2 平面 $x + y - 3z = 1$, $2x + y + z = -1$ の交線の方程式を求めよ. また, 2 平面のなす角を求めよ. (交線の方向ベクトルは 2 平面の法線ベクトルと直交することに注意. また, 交線が通る点としては例えば xy 平面との交点を考えるとよい. あるいは, 交線上の点を連立 1 次方程式の解の集合と考えてもよい.)

(4) 直線 $\dfrac{x - 1}{5} = \dfrac{y + 1}{3} = \dfrac{z - 5}{-4}$ と平面 $5x - 4y - 3z = 19$ との交点を求めよ. 更に, この直線と平面とのなす角を求めよ. (この直線と平面に対する法線とのなす角に注目せよ.)

(5) 2 直線 $x = \dfrac{y + 1}{-2} = \dfrac{z - 1}{3}$, $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y - 1}{-3} = \dfrac{z - 3}{4}$ の両方と直交する直線の方程式を求めよ.