数学演習第二　第３回　「ベクトル空間・部分空間」

(2015.10.28 実施)

1 ［**部分空間の判定**］　次の $\mathbb{R}^3$ の部分集合 W が部分空間になるかどうか判定せよ.

(1) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x \neq 0 \right\}$

(2) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; xyz = 0 \right\}$

(3) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; xyz \geqq 0 \right\}$

(4) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + 2y + z = 0 \right\}$

(5) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 = z^2 \right\}$

(6) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x + 2y + 3z = 0 \\ x - 4y + 3z = 0 \\ x - 3y + 3z = 0 \end{array} \right\}$

(7) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x + 2y + 3z = 6 \\ x - 4y + 3z = 6 \\ x - 3y + 3z = -1 \end{array} \right\}$

(8) $W = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{連立一次方程式} \\ \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + 3z = a \\ x - 4y + 3z = b \\ x - 3y + 3z = c \end{array} \right. \\ \hfill \text{が解を持つ.} \end{array} \right\}$

【要点】 数ベクトル空間 $\mathbb{R}^m$ の元 $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{b}$ に対して,

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r \rangle \ni \boldsymbol{b} \quad &\Leftrightarrow \quad c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_r\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{b} \text{ と表せる.} \\ &\Leftrightarrow \quad \text{非同次連立一次方程式 } [\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r] \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_r \end{bmatrix} = \boldsymbol{b} \text{ が解を持つ.} \\ &\overset{\textbf{教科書 定理 8.4}}{\Leftrightarrow} \quad \mathrm{rank}[\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r] = \mathrm{rank}[\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r | \boldsymbol{b}]. \end{aligned}$$

なお, $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots$ が $\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r \rangle$ に属するかどうかを調べたければ, $[\boldsymbol{a}_1, \ldots \boldsymbol{a}_r | \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots]$ を行基本変形してその階数を同時に調べるのが早い.

$\boxed{\mathbf{2}}$ ［**生成される部分空間**］ 次のそれぞれの部分空間 W に対して，与えられた $\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ が W に属するか判定せよ.（**演習書　問題 11.2.6(1)(2)(4)(5)**）

(1) $W=\left\langle \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}\right\rangle\subset\mathbb{R}^2,\quad \boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix},\ \boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}-4\\-8\end{bmatrix}$

(2) $W=\left\langle \begin{bmatrix}1\\-1\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\5\\-7\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-3\\-4\\4\end{bmatrix}\right\rangle\subset\mathbb{R}^3,\quad \boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}4\\3\\-1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}-4\\3\\1\end{bmatrix}$

(4) $W=\left\langle \begin{bmatrix}1\\1\\3\\-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\-1\\2\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-3\\4\\-7\\-6\end{bmatrix}\right\rangle\subset\mathbb{R}^4,\quad \boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}3\\9\\-5\\-7\end{bmatrix}$

(5) $W=\left\langle \begin{bmatrix}2\\2\\3\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\-1\\2\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-5\\4\\2\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-4\\5\\7\\7\end{bmatrix}\right\rangle\subset\mathbb{R}^4,\quad \boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ ［**和空間と共通部分**］

(1) $\mathbb{R}^2$ の部分空間

$$W_1=\left\{\begin{bmatrix}x\\3x\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,x\in\mathbb{R}\right\},\quad W_2=\left\{\begin{bmatrix}-2x\\x\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,x\in\mathbb{R}\right\}$$

について，$W_1, W_2, W_1\cap W_2$, 和集合 $W_1\cup W_2$, 和空間 W_1+W_2 を図示せよ．また，和集合 $W_1\cup W_2$ は部分空間でないことをチェックせよ.

(2) $\mathbb{R}^3$ の部分空間

$$W_1=\left\langle \boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}-4\\0\\1\end{bmatrix}\right\rangle,\quad W_2=\left\langle \boldsymbol{a}_3=\begin{bmatrix}1\\-3\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{a}_4=\begin{bmatrix}0\\4\\1\end{bmatrix}\right\rangle$$

について，$W_1, W_2, W_1\cap W_2$, 和空間 W_1+W_2 はそれぞれ $\mathbb{R}^3$ 内のどのような図形になるか述べよ．また和集合 $W_1\cup W_2$ は $\mathbb{R}^3$ の部分空間ではないことをチェックせよ.

$\boxed{\mathbf{4}}$ ［**和空間と共通部分**］ $\mathbb{R}^4$ の 2 つの部分空間

$$W_1=\left\langle \begin{bmatrix}1\\2\\1\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\1\\2\\2\end{bmatrix}\right\rangle,\quad W_2=\left\langle \begin{bmatrix}2\\1\\-1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\-2\\-1\end{bmatrix}\right\rangle$$

を考える．次の (i)-(iv) が成り立つための p,q,r,s の満たす条件をそれぞれ求めよ.

(i) $\begin{bmatrix}p\\q\\r\\s\end{bmatrix}\in W_1$　(ii) $\begin{bmatrix}p\\q\\r\\s\end{bmatrix}\in W_2$　(iii) $\begin{bmatrix}p\\q\\r\\s\end{bmatrix}\in W_1\cap W_2$　(iv) $\begin{bmatrix}p\\q\\r\\s\end{bmatrix}\in W_1+W_2$