平成27年度 数学演習第二

演習 第4回　微積：偏微分 [1] (偏微分, 合成関数の微分)

2015年11月4日　実施

$\boxed{1}$ 次の関数 $f(x,y)$ について, 1次と2次の偏導関数 $(f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy})$ を全て求めよ.

(1) $f(x,y) = \sqrt{y^2 - x^2}$　(2) $f(x,y) = e^x \sin y$　(3) $f(x,y) = \log_x y$

(4) $f(x,y) = \mathrm{Cos}^{-1}\left(\dfrac{x}{y}\right)$　(5) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$

$\boxed{2}$ $f(x,y)$ に1変数関数 $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ を合成した1変数関数 $g(t) = f(\varphi(t), \psi(t))$ の導関数 $g'(t)$ を求めよ (演習書 問題5.2.1 (1) 他).

(1) $f(x,y) = \mathrm{Tan}^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)$, $\varphi(t) = 2t$, $\psi(t) = 1 - t^2$

(2) $f(x,y) = \log_e(1 + x^2 + 3y^2)$, $\varphi(t) = t^2 + 1$, $\psi(t) = t^3 + 1$

$\boxed{3}$ $f(x,y)$ に2変数関数 $x = \varphi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$ を合成した2変数関数 $z(u,v) = f(\varphi(u,v), \psi(u,v))$ の偏導関数 z_u, z_v をそれぞれ求めよ (演習書 問題5.2.2 (3), (4)).

(1) $f(x,y) = \dfrac{e^{-x}}{y}$, $\varphi(u,v) = \dfrac{v}{u}$, $\psi(u,v) = u^2 + v^2$

(2) $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, $\varphi(u,v) = e^{u+v}$, $\psi(u,v) = e^{u-v}$

$\boxed{4}$ 空間1次元波動方程式 $w_{tt} - c^2 w_{xx} = 0$ $((t,x) \in \mathbb{R}^2)$ の C^2 級解 $w \in C^2(\mathbb{R}^2)$ の表現公式

$$w(t,x) = f(x + ct) + g(x - ct) \quad ((t,x) \in \mathbb{R}^2)$$

を合成関数の微分法の応用として導く. ここで，$c > 0$ は定数で，$f, g \in C^2(\mathbb{R})$ である.
但し，一般に $C^n(D) := \{\, F : D \to \mathbb{R} \mid F \text{ は } D \text{ で } C^n \text{ 級} \,\}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots, \infty)$ とする.

(1) $y_v(u,v) = 0$ $((u,v) \in \mathbb{R}^2)$ をみたす C^1 級の関数 $y(u,v)$ は，ある $h \in C^1(\mathbb{R})$ によって，$y(u,v) = h(u)$ と表されることを確かめよ.

(2) (1) より，$z_{uv}(u,v) = 0$ $((u,v) \in \mathbb{R}^2)$ をみたす C^2 級の関数 $z(u,v)$ は，ある $f, g \in C^2(\mathbb{R})$ によって，$z(u,v) = f(u) + g(v)$ と表されることを示せ.

(3) 1次変換 $t = \dfrac{u - v}{2c}$, $x = \dfrac{u + v}{2}$ による合成関数 $w(t,x) = z(u,v)$ について

$$w_x = z_u + z_v,\ w_t = c(z_u - z_v),\ w_{xx} = z_{uu} + 2z_{uv} + z_{vv},\ w_{tt} = c^2(z_{uu} - 2z_{uv} + z_{vv})$$

をそれぞれ示せ.

(4) (2), (3) から，$w_{tt} - c^2 w_{xx} = 0$ をみたす C^2 級の関数 $w(t,x)$ は，ある $f, g \in C^2(\mathbb{R})$ によって，$w(t,x) = f(x + ct) + g(x - ct)$ と表されることを導け.

$\boxed{5}$ 次の 2 変数関数 $f(x,y)$ について，3 種類の極限値

(a) $\displaystyle\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right)$　　(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right)$　　(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

がそれぞれ存在するか否かを調べよ．つまり，存在すれば，その値を計算し，そうでなければ，その理由を述べよ．

(1) $f(x,y) = \dfrac{|x+y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$　　(2) $f(x,y) = x\,\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$

(3) $f(x,y) = \begin{cases} x\,\cos\left(\dfrac{1}{y}\right) & (y \neq 0) \\ 0 & (y = 0) \end{cases}$

(4) $f(x,y) = \begin{cases} x\,\cos\left(\dfrac{1}{y}\right) - y\,\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & (xy \neq 0) \\ 0 & (xy = 0) \end{cases}$