数学演習第二　第5回　「一次独立・一次従属，基底と次元」

(2015.11.11 実施)

【要点】 数ベクトル空間 $\mathbb{R}^m$ の元 $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ に対して，

$$
\begin{aligned}
& \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k \text{が一次独立} \\
\Leftrightarrow \quad & c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{0} \text{ となる } c_1, \ldots, c_k \text{は } c_1 = \cdots = c_k = 0 \text{ に限る．} \\
\Leftrightarrow \quad & \text{同次連立一次方程式 } (*)\ [\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k] \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} = \boldsymbol{0} \text{ が自明な解のみを持つ．} \\
\overset{\text{教科書 定理 8.8(i)}}{\Leftrightarrow} \quad & \operatorname{rank}[\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k] = k
\end{aligned}
$$

なお，一次従属の場合に非自明な一次関係式 $c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{0}$ を求めたければ，$(*)$ の解を $[\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k]$ の簡約行列から読み取ればよい．

---

1 ［**数ベクトルの一次独立性の判定と非自明な一次関係式**］　次のベクトルが一次独立かどうか判定せよ．一次独立でない場合には，非自明な一次関係式を求めよ．（**演習書 11.3.1(1)(3)(5) 他**）

(1) $\begin{bmatrix} -1 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 \\ -7 \\ 17 \end{bmatrix}$　　(2) $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$　　(4) $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

2 ［**一次独立性**］　ベクトル空間 V に属する 4 つのベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ が一次独立であるとする．

(1) V 中の次のベクトルの組は一次独立かどうか判定せよ．一次従属の場合には，非自明な一次関係式を求めよ．

(i) $(\boldsymbol{a}_1 = -\boldsymbol{v}_1 + 8\boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3, \quad \boldsymbol{a}_2 = 3\boldsymbol{v}_1 - 2\boldsymbol{v}_2 - 8\boldsymbol{v}_3, \quad \boldsymbol{a}_3 = -6\boldsymbol{v}_1 - 7\boldsymbol{v}_2 + 17\boldsymbol{v}_3)$

(ii) $(\boldsymbol{a}_1 = -\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3 + \boldsymbol{v}_4, \quad \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3 + \boldsymbol{v}_4,$
$\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_3 + \boldsymbol{v}_4, \quad \boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3 - \boldsymbol{v}_4)$

(2) V 中の次のベクトルの組が一次従属となるような定数 k を求め，そのときの非自明な一次関係式を求めよ．

$$(\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{v}_1 - 2\boldsymbol{v}_2 + 4\boldsymbol{v}_3, \quad \boldsymbol{a}_2 = 3\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 - 4\boldsymbol{v}_3, \quad \boldsymbol{a}_3 = 2\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + k\boldsymbol{v}_3)$$

3 [**数ベクトル空間の基底と次元**] 次のベクトルの組のうち，$\mathbb{R}^3$ の基底になっているものをすべて答えよ．

$$\mathcal{E}:\left(\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}\right)\qquad \mathcal{F}:\left(\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right)$$
$$\mathcal{G}:\left(\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}\right)\qquad \mathcal{H}:\left(\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}\right)$$

4 [**部分空間の基底**] $\mathbb{R}^4$ の部分空間

$$W=\left\langle \boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\4\end{bmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}4\\-1\\3\\2\end{bmatrix},\boldsymbol{a}_3=\begin{bmatrix}5\\4\\3\\-8\end{bmatrix},\boldsymbol{a}_4=\begin{bmatrix}3\\1\\2\\0\end{bmatrix}\right\rangle$$

について，

(1) $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$ の間に成り立つ非自明な一次関係式をひとつ求めよ．

(2) 次のうち，W の基底となっているものをすべて選べ．

$$\mathcal{E}:(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3),\quad \mathcal{F}:(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_4),\quad \mathcal{G}:(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4),\quad \mathcal{H}:(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4)$$

(3) $\left(\boldsymbol{b}_1=\begin{bmatrix}4\\-1\\3\\3\end{bmatrix},\boldsymbol{b}_2=\begin{bmatrix}2\\3\\1\\-4\end{bmatrix},\boldsymbol{b}_3=\begin{bmatrix}9\\-4\\7\\10\end{bmatrix}\right)$ は W の基底であることを示せ．

5 [**部分空間の基底と次元**]

(1) $\mathbb{R}^3$ の部分空間 $W=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3\,\middle|\,x+y+z=0\right\}$ の基底と次元を求めよ．

(2) $\mathbb{R}^3$ の 2 つの部分空間 W_1,W_2 の基底と次元を求めよ．

$$W_1=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3\,\middle|\,\begin{matrix}x+2y+3z=0\\x-4y+3z=0\\x-3y+3z=0\end{matrix}\right\}\qquad W_2=\left\{\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3\,\middle|\,\begin{matrix}\text{連立一次方程式}\\ \begin{cases}x+2y+3z=a\\x-4y+3z=b\\x-3y+3z=c\end{cases}\\ \text{が解を持つ．}\end{matrix}\right\}$$