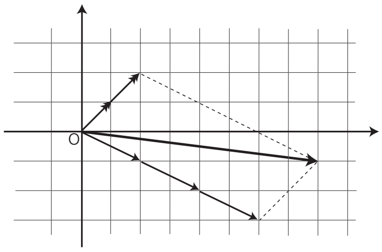
数学演習第二（第７回） 線形：座標，行列の零空間・行空間・列空間，次元定理

２０１５年１１月２５日

座標 (教科書 pp.119-121)　$\mathcal{B} = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_r)$ がベクトル空間 V の基底であるとき, 任意の $\boldsymbol{v} \in V$ は $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_r$ の一次結合でただ一通りに表される.

$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + c_r\boldsymbol{b}_r = [\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_r]\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_r \end{bmatrix}$ とするとき, 縦ベクトル $\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_r \end{bmatrix}$ を $\boldsymbol{v}$ の基底 $\mathcal{B}$ に関する <u>座標</u> といい $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}}$ と表す. たとえば $\mathbb{R}^2$ の基底を $\mathcal{B} = \left(\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ とするとき, $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \end{bmatrix}$ の基底 $\mathcal{B}$ に関する座標 $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}}$ は $\boldsymbol{v} = 3\boldsymbol{b}_1 + 2\boldsymbol{b}_2$ より $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ となる.



1 (1) $V = \mathbb{R}^3$ の標準基底 $\mathcal{E} = \left(\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ に関する $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in V$ の座標 $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{E}}$ を求めよ.

(2) $V = \mathbb{R}^3$ の基底 $\mathcal{A} = \left(\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}\right)$ に関する $\boldsymbol{v} \in V$ の座標 $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{A}}$ が $\begin{bmatrix} s \\ t \\ u \end{bmatrix}$ であるとき, $\boldsymbol{v}$ を求めよ.

(3) $V = \mathbb{R}^3$ の基底 $\mathcal{A} = \left(\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}\right)$ に関する $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in V$ の座標 $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{A}}$ を求めよ.

(4) $V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0 \right\}$ の基底 $\mathcal{A} = \left(\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ に関する $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in V$ の座標 $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{A}}$ を x と y を用いて表せ.

(5) $\mathbb{R}^4$ の部分空間 $V = \left\langle \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$ に $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ x-6 \\ y+2 \end{bmatrix}$ が含まれるとき, 実数 x, y の値を求め, $\boldsymbol{v}$ の基底 $\mathcal{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ に関する座標を求めよ.

零空間・行空間・列空間 (教科書 pp.107,128-132)　実 $m \times n$ 行列 $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_m \end{bmatrix} = [\boldsymbol{c}_1 \cdots \boldsymbol{c}_n]$ に対し, その零空間・行空間・列空間を次のように定める.

零空間 $N(A)$ 同次連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解全体.

行空間 $R(A)$ $\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_m$ で生成される $\mathbb{R}^n$ の部分空間.

列空間 $C(A)$ $\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n$ で生成される $\mathbb{R}^m$ の部分空間.

$\boxed{2}$ 次の各行列について, 零空間, 行空間および列空間の次元と基底をそれぞれ求めよ.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 \\ -4 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -3 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & x \end{bmatrix}$$

部分空間と和空間の次元定理（次元公式） (教科書 pp.133-134)
W_1, W_2 を V の部分空間とするとき,

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

が成り立つ.

$\boxed{3}$ 演習書 11.3.5 を解き，次元定理が成り立つことを確認せよ．((4) を追加）
$\mathbb{R}^4$ の部分空間 W_1, W_2 を次のように定める．

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \quad 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \right\}$$

$$W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \right\}$$

このとき次の問に答えよ.

(1) W_1, W_2 の基底と次元を求めよ.

(2) $W_1 \cap W_2$ の基底と次元を求めよ.

(3) $W_1 + W_2$ の基底と次元を求めよ.

(4) $\dim W_1,\ \dim W_2,\ \dim(W_1 \cap W_2),\ \dim(W_1 + W_2)$ の間の関係を確認せよ.