## 数学演習第二 (演習第9回)

微積:偏微分[3](陰関数・ラグランジュの未定乗数法) 2015年 12月 16日

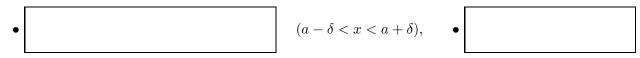


- 陰関数定理 (微積教科書 p.100) 🕳

 $C^1$  級の2変数関数 f(x,y) が、ある点 (a,b) で

f(a,b)=0 かつ  $f_y(a,b) \neq 0$  をみたすとする .

このとき、次をみたす  $C^1$  級の関数  $y=\varphi(x)$  が x=a を含むある区間  $a-\delta < x < a+\delta$  で存在する:



この  $y=\varphi(x)$  を点 (a,b) の近くで f(x,y)=0 により定義される陰関数という.このとき  $\varphi(x)$  の導関数 は次のように表される.

$$\varphi'(x) = \boxed{ (a - \delta < x < a + \delta)}$$

- 次の 2 変数関数 f(x,y) に対して,f(x,y)=0 で定まる陰関数  $y=\varphi(x)$  について y' および y'' をそれぞれ x と y の式で表せ.また,曲線 f(x,y)=0 上の指定された点における接線の方程式を求めよ.さらに,陰関数  $y=\varphi(x)$  の極値があれば求めよ.

  - (2)  $f(x,y) = \log \sqrt{x^2 + y^2} \operatorname{Tan}^{-1} \frac{y}{x}$   $(x \neq 0)$  点 (1,0) (問題 5.2.7 (4))
- $oxed{2}$  2変数関数  $f(x,y)=-x+\int_0^y rac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}\;(-1< y< 1)$  を考える.ただし, $0\le k< 1$  は定数で,

-1 < y < 0 のとき  $\int_0^y = -\int_y^0$  である.このとき,f(x,y) = 0 で定まる陰関数  $y = \varphi(x)$  について次に答えよ.

- (1) arphi'(x) を arphi(x) を用いて表し,曲線 f(x,y)=0 の原点における接線の方程式を求めよ.
- (2)  $\varphi(x)$  を  $x^3$  の項までマクローリン展開して ,  $\varphi(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+o(x^3)$  の形で表せ .
- $igl| egin{aligned} igl| igl| & C^1 & & \text{Moleon 2 goods} \ & g(x,y) \ & g(x,y) \ & \text{Moleon 2 goods} \ & g(x,y) \ & \text{Moleon 2 goods} \ & \text{Moleon$ 
  - ullet g(x,y)=0 の条件の下で、f(x,y) は点 (a,b) で極値 f(a,b)=c をとる. ullet  $g_y(a,b) 
    eq 0$
  - (1) (a,b) の近くで g(x,y)=0 の陰関数  $y=\varphi(x)$  が一意的に存在することを示し ,  $\varphi'(x)$  を g の偏導関数と  $\varphi(x)$  を用いて表せ .
  - (2) (1) の陰関数  $y=\varphi(x)$  を用いて,1 変数関数  $h(x)=f(x,\varphi(x))$  を考える.このとき導関数 h'(x) を  $\varphi'(x)$  を含まない形で表せ.さらに, $f_x(a,b)g_y(a,b)-f_y(a,b)g_x(a,b)=0$  を示せ.
  - (3)  $F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)$  とするとき, $F_x(a,b,\lambda^*)=F_y(a,b,\lambda^*)=F_\lambda(a,b,\lambda^*)=0$  をみたす実数  $\lambda^*$  が存在することを示せ(この  $\lambda^*$  はラグランジュ乗数 (Lagrange multiplier)とよばれる).
- $oldsymbol{4}$  ラグランジュの未定乗数法を用いて g(x,y)=0 の下で f(x,y) の極値を求めよ.

$$g(x,y) = x^4 + y^4 - 1,$$
  $f(x,y) = x + 8y$  (問題 5.2.13 (2))