数学演習第二　（演習第９回）

微積：偏微分 [3]（陰関数・ラグランジュの未定乗数法）

2015 年 12 月 16 日

0　【確認問題】空欄に適当な式を記入しながら，陰関数の意味を確認せよ．

陰関数定理 (微積教科書 p.100)

C^1 級の２変数関数 $f(x,y)$ が，ある点 (a,b) で

$$f(a,b)=0 \text{ かつ } f_y(a,b)\neq 0 \text{ をみたすとする．}$$

このとき、次をみたす C^1 級の関数 $y=\varphi(x)$ が $x=a$ を含むある区間 $a-\delta<x<a+\delta$ で存在する：

- $\boxed{\qquad\qquad}$ $(a-\delta<x<a+\delta)$,
- $\boxed{\qquad\qquad}$

この $y=\varphi(x)$ を点 (a,b) の近くで $f(x,y)=0$ により定義される陰関数という．このとき $\varphi(x)$ の導関数は次のように表される．

$$\varphi'(x)=\boxed{\qquad\qquad}\qquad (a-\delta<x<a+\delta)$$

1　次の２変数関数 $f(x,y)$ に対して，$f(x,y)=0$ で定まる陰関数 $y=\varphi(x)$ について y' および y'' をそれぞれ x と y の式で表せ．また，曲線 $f(x,y)=0$ 上の指定された点における接線の方程式を求めよ．さらに，陰関数 $y=\varphi(x)$ の極値があれば求めよ．

(1)　$f(x,y)=2x^2+4xy+3y^2-9$　　点 $(1,1)$

(2)　$f(x,y)=\log\sqrt{x^2+y^2}-\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{y}{x}$　$(x\neq 0)$　点 $(1,0)$　(問題 5.2.7 (4))

(3)　$f(x,y)=xe^y-y+1$　　点 $(-1,0)$　(問題 5.2.7 (5))

2　２変数関数 $f(x,y)=-x+\displaystyle\int_0^y \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$ $(-1<y<1)$ を考える．ただし，$0\leqq k<1$ は定数で，$-1<y<0$ のとき $\int_0^y=-\int_y^0$ である．このとき，$f(x,y)=0$ で定まる陰関数 $y=\varphi(x)$ について次に答えよ．

(1) $\varphi'(x)$ を $\varphi(x)$ を用いて表し，曲線 $f(x,y)=0$ の原点における接線の方程式を求めよ．

(2) $\varphi(x)$ を x^3 の項までマクローリン展開して，$\varphi(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+o(x^3)$ の形で表せ．

3　C^1 級の２変数関数 $f(x,y)$ と $g(x,y)$ が次の２条件をみたすとき，以下の問いに答えよ．

- $g(x,y)=0$ の条件の下で，$f(x,y)$ は点 (a,b) で極値 $f(a,b)=c$ をとる．
- $g_y(a,b)\neq 0$

(1) (a,b) の近くで $g(x,y)=0$ の陰関数 $y=\varphi(x)$ が一意的に存在することを示し，$\varphi'(x)$ を g の偏導関数と $\varphi(x)$ を用いて表せ．

(2) (1) の陰関数 $y=\varphi(x)$ を用いて，１変数関数 $h(x)=f(x,\varphi(x))$ を考える．このとき導関数 $h'(x)$ を $\varphi'(x)$ を含まない形で表せ．さらに，$f_x(a,b)g_y(a,b)-f_y(a,b)g_x(a,b)=0$ を示せ．

(3) $F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)$ とするとき，$F_x(a,b,\lambda^*)=F_y(a,b,\lambda^*)=F_\lambda(a,b,\lambda^*)=0$ をみたす実数 λ^* が存在することを示せ (この λ^* はラグランジュ乗数 (Lagrange multiplier) とよばれる)．

4　ラグランジュの未定乗数法を用いて $g(x,y)=0$ の下で $f(x,y)$ の極値を求めよ．

$$g(x,y)=x^4+y^4-1,\qquad f(x,y)=x+8y\qquad \text{(問題 5.2.13 (2))}$$