平成 28 年度 数学演習第二 中間統一試験 問題用紙

2016 年 11 月 30 日実施 (90 分)

・解答用紙の所定欄に結果のみを記すこと.
・簡潔な解答になるよう努めること. 不十分と判断された解答には得点を与えない.

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の極限が存在する場合にはその値を求め, 存在しない場合には「なし」と答えよ.

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4x^3+3x^2y+3xy^2+4y^3+2x^2+2y^2}{x^2+y^2}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ 2 変数関数 $f(x,y) = \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{y}{x}$ $(x \neq 0)$ に対して次の問いに答えよ.

(2) 2 階偏導関数 $f_{xy}(x,y)$ を求めよ.

(3) $x(t) = e^t$, $y(t) = t^2+1$ に対し合成関数 $g(t) = f(x(t), y(t))$ を考える. $g(t)$ の導関数 $g'(t)$ に対して $g'(0)$ の値 を求めよ.

$\boxed{\mathbf{3}}$ 2 変数関数 $z = -x^4 - y^2 + xy$ に対して次の問いに答えよ.

(4) 偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ を求めよ.

(5) 変数 x, y が $x = \cos(uv)$, $y = \sin(uv)$ と表されるとき, 偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial u}(u,v)$ に対して $\dfrac{\partial z}{\partial u}(\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})$ の値を求めよ.

$\boxed{\mathbf{4}}$ 2 変数関数 $f(x,y) = 2\sin 3x + \cos 2y$ $(0 < x, y < \pi)$ に対して次の問いに答えよ.

(6) 偏導関数 $f_x(x,y)$ を求めよ.

(7) $f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$ をみたす点 (x,y) をすべて求めよ.

(8) $f(x,y)$ が極値をとる点の座標とその極値を求めよ. (極大値か極小値かを明記すること.)

$\boxed{\mathbf{5}}$ 次のそれぞれの 2 変数関数 $f(x,y)$ に対して, $(0,0)$ における 2 次の項までのマクローリン展開

$$f(x,y) = \underline{c_0 + c_{10}x + c_{01}y + c_{20}x^2 + c_{11}xy + c_{02}y^2} + o(r^2) \quad (r = \sqrt{x^2+y^2} \to 0)$$

を求め, 下線部に相当する部分を解答欄に記せ.

(9) $f(x,y) = \log(1+xy)$

(10) $f(x,y) = e^x \sin(x+y)$

$\boxed{\mathbf{6}}$ $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ について, 次の問いに答えよ.

(11) 外積 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2$ を求めよ.

(12) $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ の作る平行四辺形の面積を求めよ.

(13) $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ の作る平行六面体の体積を求めよ.

$\boxed{\mathbf{7}}$ $\mathbb{R}^4$ の部分空間 $W = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle$ について, 次の問いに答えよ.

(14) $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ \alpha \\ 1 \end{bmatrix} \in W$ をみたすような α の値を求めよ.

$\boxed{\mathbf{8}}$ $\mathbb{R}^3$ の部分空間 $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} x + 3y + 2z = 0 \\ 2x + 5y + 4z = 0 \\ 3x + 7y + 6z = 0 \end{matrix} \right\}$ について, 次の問いに答えよ.

(15) W の基底を求めよ．ただし，整数を成分とする列ベクトルを用いて答えること.

$\boxed{\mathbf{9}}$ $\mathbb{R}^4$ の部分空間 $W = \left\langle \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} \right\rangle$ について, 次の問いに答えよ.

(16) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ の間に成り立つ非自明な一次関係式をひとつ求めよ.
ただし，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ の係数がすべて整数であるものを答えること.

(17) 次のうち，W の基底となっているものをすべて選べ.

$$E : (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3), \quad F : (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4), \quad G : (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4), \quad H : (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4)$$

$\boxed{\mathbf{10}}$ $\mathbb{R}^3$ の自然な基底 $\mathcal{E} = \left(\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ と，さらに次の 2 つの基底を考える.

$$\mathcal{A} = \left(\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right), \quad \mathcal{B} = \left(\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

(18) 座標 $[\boldsymbol{b}_1]_{\mathcal{E}}$ を求めよ.

(19) 座標 $[\boldsymbol{b}_1]_{\mathcal{A}}$ を求めよ.

(20) $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ の基底 $\mathcal{A}$ に関する座標 $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{A}}$ が $\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$ のとき，座標 $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}}$ を p, q, r を用いて表せ.