演習 第 1 回　微積：逆三角関数，極限値

2016 年 5 月 11 日

1

(2) $\dfrac{a^x-b^x}{x}=\dfrac{a^x-1}{x}-\dfrac{b^x-1}{x}=\dfrac{e^{x\log a}-1}{x\log a}\cdot\log a-\dfrac{e^{x\log b}-1}{x\log b}\cdot\log b\to\log a-\log b=\log\dfrac{a}{b}\ (x\to 0).$

あるいは，$\dfrac{a^x-b^x}{x}=b^x\cdot\dfrac{(\frac{a}{b})^x-1}{x}=b^x\cdot\dfrac{e^{x\log\frac{a}{b}}-1}{x\log\frac{a}{b}}\cdot\log\dfrac{a}{b}\to\log\dfrac{a}{b}\ (x\to 0).$

(6) $y=x-\dfrac{\pi}{3}$ とおけば，$x\to\dfrac{\pi}{3}$ のとき $y\to 0$ なので，

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin(x+\frac{\pi}{6})-1}{x-\frac{\pi}{3}}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin(y+\frac{\pi}{2})-1}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{\cos y-1}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{(\cos y-1)(\cos y+1)}{y(\cos y+1)}$$
$$=\lim_{y\to 0}\frac{-\sin^2 y}{y(\cos y+1)}=\lim_{y\to 0}\left(\frac{\sin y}{y}\right)^2\frac{-y}{\cos y+1}=0.$$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x}=1$ に注意して，

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\frac{1}{1+\cos x}=\frac{1}{2}.$$

【別解】(6), (7) では $1-\cos x=2\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$ を用いる方法も有効.

【注意】上では $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$ に注目したが, $\tan x$ を $\frac{\sin x}{\cos x}$ に置き換えて議論しても計算量はほとんど変わらない. 下の (8), (11), (14) に関しても同様である.

(8) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$ に注意して，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(\sin x)}{\tan x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan(\sin x)}{\sin x}\cdot\cos x\right)=\lim_{y\to 0}\frac{\tan y}{y}\cdot\lim_{x\to 0}\cos x=1.\quad (y=\sin x\ \text{とおいた})$$

(11) $y=\dfrac{\pi}{2}-x$ とおけば $x\to\dfrac{\pi}{2}-0$ のとき $y\to +0$ であるから，

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\tan x=\lim_{y\to +0}y\tan\left(\frac{\pi}{2}-y\right)=\lim_{y\to +0}\frac{y}{\tan y}=1.$$

(12) 自然対数をとって考える. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\log(x^{\frac{1}{1-x}})=-\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{x-1}=-\lim_{y\to 0}\frac{\log(1+y)}{y}=-1$ $(y=x-1$ とおいた). $x^{\frac{1}{1-x}}=e^{\log(x^{\frac{1}{1-x}})}$ であるから，$\displaystyle\lim_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}=e^{\lim_{x\to 1}\log(x^{\frac{1}{1-x}})}=e^{-1}\left(=\frac{1}{e}\right).$

【別解】 $y=\dfrac{1}{x-1}$ とおくと，$\displaystyle\lim_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}=\lim_{y\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-y}=e^{-1}$ (微積 教科書の定理 1.3.2 参照)

(13) 自然対数をとって考える. $\log(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\dfrac{\log(\cos x)}{x^2}=\dfrac{\log(\cos x)}{\cos x-1}\dfrac{\cos x-1}{x^2}$ であるから, (7), (12) の計算を用いて，

$$\lim_{x\to 0}\log(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos x)}{x^2}=\lim_{y\to 1}\frac{\log y}{y-1}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=-\frac{1}{2}\quad (y=\cos x\ \text{とおいた})$$

よって, (12) と同様に，$\displaystyle\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\lim_{x\to 0}\log(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}}=e^{-\frac{1}{2}}\left(=\frac{1}{\sqrt{e}}\right).$

【別解】 $\log(\cos x)=\frac{1}{2}\log(\cos^2 x)=\frac{1}{2}\log(1-\sin^2 x)$ と変形してもよい.

(14) $\displaystyle\lim_{x\to +0}\log x=-\infty$ より，$\displaystyle\lim_{x\to +0}\frac{\log(\tan x)}{\log x}=\lim_{x\to +0}\frac{\log\left(\frac{\tan x}{x}\cdot x\right)}{\log x}=\lim_{x\to +0}\frac{\log\left(\frac{\tan x}{x}\right)}{\log x}+1=1$ だから，

$$\lim_{x\to +0}\frac{\log(\tan 2x)}{\log(\tan x)}=\lim_{x\to +0}\frac{\log(\tan 2x)}{\log(2x)}\frac{\log x}{\log(\tan x)}\left(\frac{\log 2}{\log x}+1\right)=1$$

【注意】一般に, $b=\lim_{x\to a}f(x)$ が存在し, $g(y)$ が $y=b$ で連続なら, $\lim_{x\to a}g(f(x))=g(\lim_{x\to a}f(x))=g(b)$ が成り立つ (連続性の定義に他ならない). (12), (13) の解答例ではこの事実 (e^x の連続性) を用いている.

$\boxed{\mathbf{2}}$

(1) $\theta=\mathrm{Cos}^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ とおけば，$\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$ $(0\leq\theta\leq\pi)$ であるから　$\theta=\dfrac{2\pi}{3}$.

(2) $\theta=\mathrm{Sin}^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ とおけば，$\sin\theta=-\dfrac{1}{2}$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{2}\right)$ であるから　$\theta=-\dfrac{\pi}{6}$.

(3) $\theta=\mathrm{Tan}^{-1}(-\sqrt{3})$ とおけば，$\tan\theta=-\sqrt{3}$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ であるから　$\theta=-\dfrac{\pi}{3}$.

(4) $\theta=\mathrm{Cos}^{-1}\left(\cos\dfrac{6\pi}{5}\right)$ とおけば，$\cos\theta=\cos\dfrac{6\pi}{5}$ $(0\leq\theta\leq\pi)$ であるから　$\theta=2\pi-\dfrac{6\pi}{5}=\dfrac{4\pi}{5}$.

(5) $\alpha=\mathrm{Sin}^{-1}\left(-\dfrac{1}{3}\right)$ とおけば，$\sin\alpha=-\dfrac{1}{3}$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}\leq\alpha\leq\dfrac{\pi}{2}\right)$ で，$\tan\left(\mathrm{Sin}^{-1}\left(-\dfrac{1}{3}\right)\right)=\tan\alpha$. このとき，$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=\dfrac{8}{9}$. $\cos\alpha>0$ より $\cos\alpha=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ となるので，求める値は $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\dfrac{1}{\sqrt{8}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

【別解】 $\tan^2\alpha=\dfrac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}=\dfrac{1}{8}$ を用いて　$\tan\alpha<0$ より　$\tan\alpha=-\dfrac{1}{\sqrt{8}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

(6) $\sin x$ は $\left(x=-\dfrac{\pi}{2}\text{で}\right)$ 連続なので (微積 教科書の例題 1.2.2),

$$\lim_{x\to-\infty}\sin\left(\mathrm{Tan}^{-1}x\right)=\sin\left(\lim_{x\to-\infty}\mathrm{Tan}^{-1}x\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$$

$\boxed{\mathbf{3}}$

(1) $x=\cos\left(\mathrm{Tan}^{-1}2\right)$ と変形できる．ここで $\alpha=\mathrm{Tan}^{-1}2$ とおけば，$\tan\alpha=2$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$. $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}=1+\tan^2\alpha=5$　より　$\cos^2\alpha=\dfrac{1}{5}$. $\cos\alpha>0$ に注意して，$x=\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

(2) $x=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-2\,\mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{1}{4}\right)=\cos\left(2\,\mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{1}{4}\right)$ と変形できる．ここで $\alpha=\mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{1}{4}$ とおけば，$\sin\alpha=\dfrac{1}{4}$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}\leq\alpha\leq\dfrac{\pi}{2}\right)$ であるから，$x=\cos2\alpha=1-2\sin^2\alpha=\dfrac{7}{8}$.

(3) $x=\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-2\,\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{3}\right)$ と変形できる．$\alpha=\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{3}$ とおけば，$\tan\alpha=\dfrac{1}{3}$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$. このとき，$x=\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-2\alpha\right)=\dfrac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan2\alpha}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan2\alpha}=\dfrac{1-\tan2\alpha}{1+\tan2\alpha}$.　また，$\tan2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\dfrac{3}{4}$. よって, $x=\dfrac{1-\frac{3}{4}}{1+\frac{3}{4}}=\dfrac{1}{7}$.

$\boxed{\mathbf{4}}$

(1) $\theta=\mathrm{Sin}^{-1}x$ とおけば, $\sin\theta=x$ $(-\pi/2\leq\theta\leq\pi/2)$. このとき, $x=\sin\theta=\cos(\pi/2-\theta)$ かつ $0\leq\pi/2-\theta\leq\pi$ であるから, Cos^{-1} の定義により　$\pi/2-\theta=\mathrm{Cos}^{-1}x$. よって，$\mathrm{Sin}^{-1}x+\mathrm{Cos}^{-1}x=\theta+(\pi/2-\theta)=\pi/2$.

(2) $\theta=\mathrm{Tan}^{-1}x$ とおけば, $x>0$ に注意して, $\tan\theta=x$ $(0<\theta<\pi/2)$. このとき,

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin(\pi/2-\theta)}{\cos(\pi/2-\theta)}=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

かつ $0<\pi/2-\theta<\pi/2$ であるから，Tan^{-1} の定義により $\pi/2-\theta=\mathrm{Tan}^{-1}(1/x)$.　よって，$\mathrm{Tan}^{-1}x+\mathrm{Tan}^{-1}(1/x)=\theta+(\pi/2-\theta)=\pi/2$.