数学演習第一 （演習第２回）

線形：平面の方程式，行列の演算　2016 年 5 月 18 日

1 (1) 直線のベクトル方程式は $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$. これを t について解き, $\boxed{\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z+1}{4}}$ $(= t)$.

(2) 平面のベクトル方程式は $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right) = 0$. これより, $x - (y-1) + 3(z-2) = 0$. これを整理して, $\boxed{x - y + 3z = 5}$.

(3) ① 仮定より, $ax+by+cz+d = 0$ かつ $ax_0+by_0+cz_0+d = 0$. 差をとり, $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0) = 0$, すなわち $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0) = 0$. よって, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0$ は直交する.

② 仮定より, $ax+by+cz+d > 0$ かつ $ax_0+by_0+cz_0+d = 0$. 差をとり, $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0) > 0$. よって, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0$ のなす角を θ とすれば, $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0) = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|\cos\theta > 0$. これより $\cos\theta > 0$ となり, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0$ は鋭角をなす. (これは $\boldsymbol{a}$ が $ax+by+cz+d > 0$ の側を指していることを意味する.)

③ $\boldsymbol{e}$ と $\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0$ のなす角を θ とすれば, $|\boldsymbol{e}\cdot(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)| = \|\boldsymbol{e}\|\|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0\||\cos\theta| = \|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0\||\cos\theta|$. この量は, ベクトル $\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0$ の, 平面の法線方向への正射影の長さを表しているから, 点 $\boldsymbol{x}_1$ から平面までの距離 ($\boldsymbol{x}_1$ から平面に下ろした垂線の長さ) にほかならない (図を描いてみよ). このとき,

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{e}\cdot(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)| &= \frac{|\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)|}{\|\boldsymbol{a}\|} = \frac{|a(x_1-x_0)+b(y_1-y_0)+c(z_1-z_0)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ &= \frac{|ax_1+by_1+cz_1-(ax_0+by_0+cz_0)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \end{aligned}$$

となり, 証明が終わる.

2 (1) $A+B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $A-B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 3 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$,

$2A+3B = 2\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 6 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ -3 & 3 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 1 & 9 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$.

(2) $A+B$ および $A-B$ については, 演習書の解答参照.

$$2A+3B = 2\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 18 \\ 15 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 26 \\ 19 & 26 \end{bmatrix}.$$

3 (1) $AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 2 + (-1)\cdot 1 + 3\cdot(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \end{bmatrix}$　(-2 と答えてもよい).

(2) $AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$.

(3) $AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$.

(4) $AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 5 \end{bmatrix}$.

(5) $AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$.

(6) $AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \\ -2 & 6 & 3 \end{bmatrix}$.

4 演習書の解答参照.

5 ${}^{t}A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$, ${}^{t}B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$, ${}^{t}(AB) = {}^{t}\begin{bmatrix} 23 & 22 \\ 41 & 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 & 41 \\ 22 & 40 \end{bmatrix} = {}^{t}B\,{}^{t}A$, ${}^{t}A\,{}^{t}B = \begin{bmatrix} 15 & 13 \\ 54 & 48 \end{bmatrix}$.

6 目の子で探してもよいが, $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ をそれぞれの関係式に代入してみればシステマティックに例が求まる.
このとき, $AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ 2a+2c & 2b+2d \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2b & a+2b \\ c+2d & c+2d \end{bmatrix}$ となる.

(1) $AB - BA = \begin{bmatrix} -2b+c & -a+b-d \\ 2a+c-2d & 2b-c \end{bmatrix} \neq O$ であればよいので, 例は作りやすい. 演習書問題 8.1.1 (1) の A, B が 1 つの例.

(2) $B \neq O$ かつ $AB = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ 2a+2c & 2b+2d \end{bmatrix} = O$ となればよい. $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ が 1 つの例.
B の一般形は $B = \begin{bmatrix} a & b \\ -a & -b \end{bmatrix}$ $((a,b) \neq (0,0))$.

(3) $B \neq O$ かつ $BA = \begin{bmatrix} a+2b & a+2b \\ c+2d & c+2d \end{bmatrix} = O$ となればよい. $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ が 1 つの例.
B の一般形は $B = \begin{bmatrix} -2b & b \\ -2d & d \end{bmatrix}$ $((b,d) \neq (0,0))$.

a, b が実数ならば, $ab = ba$ であり, $ab = 0$ ならば a, b の少なくとも一方は 0 となる. 上の例は, 行列の場合にはこれらの事実は必ずしも成立しないことを示している.

7 (1) $A\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix} = 8\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 8\boldsymbol{v}_1$ より, $\lambda_1 = 8$. $A\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 4\boldsymbol{v}_2$ より, $\lambda_2 = 4$.
$A\boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -\boldsymbol{v}_3$ より, $\lambda_3 = -1$.

(2) $A\boldsymbol{v}_1 = 8\boldsymbol{v}_1 + 0\boldsymbol{v}_2 + 0\boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $A\boldsymbol{v}_2 = 0\boldsymbol{v}_1 + 4\boldsymbol{v}_2 + 0\boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$,
$A\boldsymbol{v}_3 = 0\boldsymbol{v}_1 + 0\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. よって,

$$AB = A\begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\boldsymbol{v}_1 & A\boldsymbol{v}_2 & A\boldsymbol{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = B\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

より, C として $\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ がとれる. (実は, いまの場合, このような C はこれのみ.)

8 (1) $(x', y') = (x, -y)$ より, $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. すなわち, $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

(2) $x' + iy' = (\cos\theta + i\sin\theta)(x + iy) = (x\cos\theta - y\sin\theta) + i(x\sin\theta + y\cos\theta)$ より,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad \text{すなわち,} \quad Q_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

(3) ヒントにより, $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = Q_\theta\Bigl(R\Bigl(Q_{-\theta}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\Bigr)\Bigr) = Q_\theta R Q_{-\theta}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ が成り立つ (第 2 の等号は行列の積の結合法則による). よって,

$$R_\theta = Q_\theta R Q_{-\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta - \sin^2\theta & 2\cos\theta\sin\theta \\ 2\cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta - \cos^2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}.$$