数学演習第一 （演習第２回）

線形：平面の方程式, 行列の演算

2016 年 5 月 18 日

1 (空間内の直線と平面の問題)

① 点 $\boldsymbol{x}_0 = {}^t(x_0, y_0, z_0)$ を通り, $\boldsymbol{a} = {}^t(a, b, c)$ を方向ベクトルとする直線の方程式は

$$\underset{\text{(媒介変数表示)}}{\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{a}} \iff \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \quad \text{あるいは} \quad \boxed{\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}}.$$

(右の表現は $abc \neq 0$ の場合の形. 例えば $a = 0, bc \neq 0$ なら, $x = x_0, \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$ となる.)

② 点 $\boldsymbol{x}_0 = {}^t(x_0, y_0, z_0)$ を通り, $\boldsymbol{a} = {}^t(a, b, c)$ を法線ベクトルとするので, その方程式は

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0 \quad \text{あるいは} \quad \boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0}.$$

(右の表現は通常 $ax + by + cz + d = 0$ または $ax + by + cz = e$ の形に整理する.)

(1) 点 $(1, 2, -1)$ を通り, $(2, 3, 4)$ を方向ベクトルとする直線の方程式を求めよ.

(2) 点 $(0, 1, 2)$ を通り, $(1, -1, 3)$ を法線ベクトルとする平面の方程式を求めよ.

(3) 平面 $ax + by + cz + d = 0$ 上に定点 $\boldsymbol{x}_0 = {}^t(x_0, y_0, z_0)$ をとる. ① この平面上の任意の点 $\boldsymbol{x} = {}^t(x, y, z)$ に対して, $\boldsymbol{a} = {}^t(a, b, c)$ と $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0$ が直交すること (内積 0) を示せ. ② $ax + by + cz + d > 0$ の範囲にある任意の点 $\boldsymbol{x} = {}^t(x, y, z)$ に対して, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0$ は鋭角をなす (従って $\boldsymbol{a}$ は $ax + by + cz + d > 0$ の側を指している) ことを示せ. ③ 空間内に点 $\boldsymbol{x}_1 = {}^t(x_1, y_1, z_1)$ をとり, $\boldsymbol{a}$ の方向の単位ベクトル $\boldsymbol{e}$ と $\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0$ との内積の意味を考えて, 点 $\boldsymbol{x}_1$ と平面の距離 (垂線の長さ) が $\dfrac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ であることを示せ.

2 次の行列 A, B に対し, 和 $A + B$, 差 $A - B$, および $2A + 3B$ を求めよ.

(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ (2) (演習書) 問題 8.1.1 (1) の行列 A, B

3 次の行列 A, B に対し, 積 AB を求めよ.

(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ (2) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

(3) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ (4) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

(5) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ (6) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

4 (演習書) 問題 8.1.1 (1), (2), (3), (4) の行列 A, B に対し, 積 AB, BA が定義されるなら計算せよ.

5 (演習書) 問題 8.1.1 (1) の行列 A, B に対し, 転置行列 ${}^tA, {}^tB, {}^t(AB)$ を求め, 更に積 ${}^tB\,{}^tA$ と ${}^tA\,{}^tB$ を求めよ.

6 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ のとき, 次の性質を満たす零行列でない 2 次正方行列 B の例をそれぞれ挙げよ.

(1) $AB \neq BA$ (2) $AB = O$ (3) $BA = O$

7 行列 $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ とベクトル $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ に対して, 以下の問いに答えよ.

(1) $A\boldsymbol{v}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{v}_1$, $A\boldsymbol{v}_2 = \lambda_2 \boldsymbol{v}_2$, $A\boldsymbol{v}_3 = \lambda_3 \boldsymbol{v}_3$ となる実数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ を求めよ.

(2) 3 次の正方行列 B が $B = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{bmatrix}$ と列ベクトル分割によって与えられているとする. このとき, $AB = BC$ となる 3 次正方行列 C を (1 つ) 答えよ.

8 次を満たす 2 次正方行列 R, Q_θ, R_θ を定めよ.

(1) 点 (x, y) を x 軸に関して対称移動した点を (x', y') とするとき, この 2 点の関係を $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ の形に書き表せ.

(2) 点 (x, y) を原点の周りに角 θ だけ回転移動した点を (x', y') とする. これを複素数平面上で考えれば, $x' + iy' = (\cos\theta + i\sin\theta)(x + iy)$ と書ける. このとき, 2 点の関係を $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = Q_\theta \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ の形に書き表せ.

(3) x 軸を原点の周りに角 θ だけ回転移動した直線を ℓ_θ とする. 点 (x, y) を ℓ_θ に関して対称移動した点を (x', y') とするとき, 2 点の関係を $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = R_\theta \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ の形に書き表せ. 【ヒント】点 (x, y) を, まず原点の周りに $-\theta$ だけ回転移動し (この回転移動で ℓ_θ は x 軸に重なる), 次に x 軸に関して対称移動し, 最後に原点の周りに θ だけ回転移動すれば点 (x', y') が得られる.