数学演習第一（演習 第 3 回） 微積：合成関数の微分, 逆関数の微分等

2016 年 5 月 25 日 実施

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $f(x)$ の定義域は $x > e$ である．合成関数の微分法により，

$$f'(x) = \frac{(\log(\log x))'}{\log(\log x)} = \frac{1}{\log(\log x)} \cdot \frac{(\log x)'}{\log x} = \frac{1}{x(\log x)\log(\log x)}.$$

(2) $f(x)$ は $\mathbb{R}$ 全体で定義される．合成関数の微分法により，

$$f'(x) = a^{x^2+2x}(\log a) \cdot (x^2+2x)' = 2(x+1)a^{x^2+2x}\log a.$$

(3) $f(x)$ は $\cos x \neq -1$ かつ $\sin x \neq -1$ のときに定義される．このままの形で微分することもできるが，対数の性質を利用して $f(x) = \frac{1}{2}\{\log(1+\cos x) - \log(1+\sin x)\}$ と変形してから微分する:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{-\sin x}{1+\cos x} - \frac{\cos x}{1+\sin x}\right) = -\frac{1+\sin x+\cos x}{2(1+\sin x)(1+\cos x)}.$$

【注】 最初の等号に続く式で, 分子分母に, $1-\cos x$, $1-\sin x$ を掛けると多少簡単な式となる:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1-\cos x}{\sin x} - \frac{1-\sin x}{\cos x}\right) = \frac{1-\sin x-\cos x}{2\sin x\cos x}.$$

(4) $f(x)$ は $x \neq -3, -1, 2$ で定義される．$\log|f(x)| = 2\log|x+1| - 3\log|x-2| - 4\log|x+3|$ の両辺を x で微分すると，

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2}{x+1} - \frac{3}{x-2} - \frac{4}{x+3} = -\frac{5x^2+6x+13}{(x+1)(x-2)(x+3)}.$$

$$\therefore\ f'(x) = \frac{(x+1)^2}{(x-2)^3(x+3)^4} \cdot \frac{-(5x^2+6x+13)}{(x+1)(x-2)(x+3)} = -\frac{(x+1)(5x^2+6x+13)}{(x-2)^4(x+3)^5}.$$

【注】 対数微分法を適用する際に, 理論的には, (分母の零点とともに) 分子の零点 $x=-1$ が定義域から外れるが, 計算結果 (上式右辺の有理式) をもとの有理式の導関数と見るならば $x=-1$ でも有効である．実際, 商の微分公式から, 有理式は分母の零点以外で (計算しなくても) 連続な導関数をもつことが分かっている．

(5) $f(x)$ の定義域は $0 < x < 1$ である．$\log|f(x)| = \dfrac{1}{2}\{\log(1-\sqrt{x}) - \log(1+\sqrt{x})\}$ の両辺を x で微分すると，

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}(1-\sqrt{x})} - \frac{1}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{x}(1-x)}.$$

$$\therefore\ f'(x) = \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}} \cdot \frac{-1}{2\sqrt{x}(1-x)} = -\frac{1-\sqrt{x}}{2\sqrt{x(1-x)^3}}.$$

(6) $f(x)$ の定義域は $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{\infty}(2n\pi, (2n+1)\pi)$ である．$\log f(x) = \sqrt{x}\cdot\log(\sin x)$ の両辺を x で微分すると，

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\log(\sin x)}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\cdot\frac{\cos x}{\sin x} \quad より， \quad f'(x) = (\sin x)^{\sqrt{x}}\left(\frac{\log(\sin x)}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}\cos x}{\sin x}\right).$$

【注】 $x = (2n+\frac{1}{2})\pi$ での $\tan x$ の値が定まらないので, $\frac{\sqrt{x}}{\tan x}$ ではなく $\frac{\sqrt{x}\cos x}{\sin x}$ と書いた．($\frac{\sqrt{x}}{\tan x}$ でも正しい)

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $y = \mathrm{Sin}^{-1}x$ とおけば，$x = \sin y\ \left(-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\right)$，$\dfrac{dx}{dy} = \cos y = \sqrt{1-x^2}$ より，$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(2) $y = \mathrm{Cos}^{-1}x$ とおけば，$x = \cos y\ (0 \leq y \leq \pi)$，$\dfrac{dx}{dy} = -\sin y = -\sqrt{1-x^2}$ より，$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(3) $y = \mathrm{Tan}^{-1}x$ とおけば，$x = \tan y\ \left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)$，$\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\cos^2 y} = 1+x^2$ より，$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{1+x^2}$.

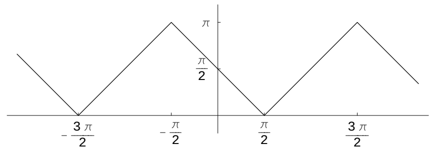
$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}} \cdot (x^2)' = \dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$.

(2) $f'(x) = \dfrac{1}{1+(\sqrt{1-x})^2} \cdot (\sqrt{1-x})' = \dfrac{1}{2-x} \cdot \dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}} = \dfrac{1}{2(x-2)\sqrt{1-x}}$.

(3) $f(x) = \exp(\log x \cdot \mathrm{Tan}^{-1} x)$ より, $f'(x) = f(x)(\log x \cdot \mathrm{Tan}^{-1} x)' = x^{\mathrm{Tan}^{-1} x}\left(\dfrac{\mathrm{Tan}^{-1} x}{x} + \dfrac{\log x}{1+x^2}\right)$.

(4) $f'(x) = -\dfrac{(\sin x)'}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = -\dfrac{\cos x}{|\cos x|} \quad \left(= \begin{cases} -1 & (\cos x > 0) \\ 1 & (\cos x < 0) \end{cases}\right)$.

《注》上の事実と $\mathrm{Cos}^{-1}(\sin n\pi) = \mathrm{Cos}^{-1} 0 = \dfrac{\pi}{2}$ $(n \in \mathbb{Z})$ より, $y = \mathrm{Cos}^{-1}(\sin x)$ のグラフは右の通り.



(5) $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{-1/x^2}{1+(1/x)^2} = 0$.

《注》 $\mathrm{Tan}^{-1}(\pm 1) = \pm\dfrac{\pi}{4}$ であるから上と合わせて, $f(x) = \pm\dfrac{\pi}{2}$ $(x \gtrless 0)$ (複号同順).

(6) $f'(x) = \dfrac{(2x-1)'}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} + 2 \cdot \dfrac{-(\sqrt{x})'}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{4x-4x^2}} + \dfrac{-2}{\sqrt{1-x}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 0$.

《注》$f(x)$ は定義域 $0 < x < 1$ で定数であり, $f(x) = f(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{2}$. このことは $\theta = \mathrm{Cos}^{-1}\sqrt{x}$ とおくと $\sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta) = \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2x - 1$ となることからもわかる.

(7) $f'(x) = \sqrt{a^2-x^2} + x \cdot \dfrac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2}} + a^2 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-(x/a)^2}} \cdot \dfrac{1}{a} = \sqrt{a^2-x^2} + \dfrac{-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} + \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$
$= 2\sqrt{a^2-x^2}$.

$\boxed{\mathbf{4}}$ 双曲線関数 $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ については微積教科書 p.19 参照. 特に, 次の性質は重要 (三角関数の場合と比較せよ):

$$(\sinh x)' = \cosh x, \quad (\cosh x)' = \sinh x, \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

これらの性質は定義を用いて容易に確認できる.

(1) まず, $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \sinh x = \pm\infty$ (複号同順) と中間値の定理により, $y = \sinh x$ の値域は $\mathbb{R}$ 全体. また, $\dfrac{dy}{dx} = \cosh x = \sqrt{1+\sinh^2 x} = \sqrt{1+y^2}$ である. $\dfrac{dy}{dx} > 0$ と $y = \sinh x$ の全射性により, $y = \sinh x$ の逆関数は $\mathbb{R}$ 全体で定義される. その導関数は $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\frac{dy}{dx}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}$.

《別解》 $e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$ により $x = \log(y + \sqrt{1+y^2})$ と具体的な形を求めることもできる. よって, その導関数は

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y+\sqrt{1+y^2}}\left(1 + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}.$$

(2) まず, $\tanh x = 1 - \dfrac{2}{e^{2x}+1}$ より, $y = \tanh x$ の値域は $-1 < y < 1$. また, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x = 1 - y^2$ である. これより $\dfrac{dy}{dx} > 0$ であることがわかり, $y = \tanh x$ の逆関数は $-1 < y < 1$ で定義される. その導関数は $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\frac{dy}{dx}} = \dfrac{1}{1-y^2}$.

《別解》 $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \Leftrightarrow e^{2x} = \dfrac{1+y}{1-y}$ に注意する. $e^{2x} > 0$ なので, この等式を満たす $x \in \mathbb{R}$ が存在するための条件は $-1 < y < 1$ であり, このとき $x = \dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{1+y}{1-y}\right) \left(= \log\sqrt{\dfrac{1+y}{1-y}}\right)$ を得る. よって, その導関数は

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}\frac{d}{dy}\{\log(1+y) - \log(1-y)\} = \frac{1}{1-y^2} \quad (-1 < y < 1).$$