第 4 回 線形：行列の基本変形, 階数

2016 年 6 月 1 日

1 (1) 第 2 行の主成分が第 1 行の主成分より左にある．第 1 行と第 2 行を交換して, 簡約行列は $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(2) 第 1 行と第 2 行の主成分が 1 でない．第 1 行と第 2 行をそれぞれ $\frac{1}{2}$ 倍して, 簡約行列は $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 5/2 \end{bmatrix}$.

(3) 第 2 行の主成分が第 3 列にあるが, 第 3 列には他にも 0 でない成分がある．第 1 行に第 2 行の 2 倍を, 第 3 行に第 2 行の -1 倍をそれぞれ加えて, 簡約行列は $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

2

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{①\leftrightarrow②} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow[③-7\times①]{②-4\times①} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{6}\times③]{-\frac{1}{3}\times②} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[③-②]{①-2\times②} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3 簡約行列の主成分を四角で囲んで示しておく．主成分の個数が階数である．スペースの関係で省略するが, これ以外の手順もあり得る．

(1)
$$\begin{bmatrix} 3 & -5 & 7 \\ -2 & 4 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}\times②} \begin{bmatrix} 3 & -5 & 7 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{②\leftrightarrow①} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -5 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{②-3\times①} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{①+2\times②} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & -2 \end{bmatrix}.$$
階数は 2.

(2)
$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 & 15 \\ 2 & 4 & 3 & 12 \\ 1 & 2 & 3 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}\times①} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 12 \\ 1 & 2 & 3 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow[③-①]{②-2\times①} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[③-2\times②]{①-②} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
階数は 2.

(3)
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \\ 1 & 16 & 81 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{③-① \\ ④-①}]{②-①} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 6 & 24 \\ 0 & 14 & 78 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{③-3\times② \\ ④-7\times②}]{①-②} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 36 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{②-③ \\ ④-6\times③}]{①+\frac{1}{2}\times③} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{6}\times③]{\frac{1}{2}\times②} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
階数は 3.

(4)
$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 15 & 1 \\ 5 & 2 & 16 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 2 \\ 7 & 2 & 20 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{②-2\times③ \\ ④-3\times③}]{①-③} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 7 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{③-2\times① \\ ④-①}]{②-①} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 & -1 \\ 0 & -2 & -6 & -2 \\ 0 & -3 & -9 & 4 \\ 0 & -3 & -9 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}\times②} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -9 & 4 \\ 0 & -3 & -9 & -4 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow[\substack{③+3\times② \\ ④+3\times②}]{①-2\times②} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{7}\times③} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{②-③ \\ ④+③}]{①+3\times③} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
階数は 3.

4 (1) 基本行列は 3×3 行列. $A \xrightarrow{①+(-5)\times②} B$ なので, $B = P_{12}(-5)A$. 従って, $M = P_{12}(-5) = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(2) 基本行列は 3×3 行列. $A \xrightarrow{2\times③} \bullet \xrightarrow{①\leftrightarrow③} B$ なので, $B = P_{13}P_3(2)A$. 従って,

$$M = P_{13}P_3(2) = P_{13}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

積を「計算」する必要はなく, P_{13} に対応する行基本変形を施せばよいことに注意.

(3) 基本行列は 4×4 行列． $A \xrightarrow{②+5\times④} \bullet \xrightarrow{②+2\times①} \bullet \xrightarrow{①\leftrightarrow④} \bullet \xrightarrow{③+(-3)\times②} B$ なので，
$B = P_{32}(-3)P_{14}P_{21}(2)P_{24}(5)A$． 従って，

$$M = P_{32}(-3)P_{14}P_{21}(2)P_{24}(5) = P_{32}(-3)P_{14}P_{21}(2)\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&5\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$
$$= P_{32}(-3)P_{14}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&5\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} = P_{32}(-3)\begin{bmatrix}0&0&0&1\\2&1&0&5\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&0&0&1\\2&1&0&5\\-6&-3&1&-15\\1&0&0&0\end{bmatrix}.$$

$\boxed{5}$ $a_1 = a_2 = \cdots = a_m = 0$ または $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$ のときは $A = O$ (零行列) となるため, $\operatorname{rank} A = 0$.
そうでないとき, 例えば $a_1 \neq 0$, $b_1 \neq 0$ とすると,

$$A = \begin{bmatrix}a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n\\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_mb_1 & a_mb_2 & \cdots & a_mb_n\end{bmatrix} \xrightarrow{(1/a_1)\times①} \begin{bmatrix}b_1 & b_2 & \cdots & b_n\\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_mb_1 & a_mb_2 & \cdots & a_mb_n\end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow[ⓜ-a_m\times①]{\substack{②-a_2\times①\\ \vdots}} \begin{bmatrix}b_1 & b_2 & \cdots & b_n\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix} \xrightarrow{(1/b_1)\times①} \begin{bmatrix}1 & b_2/b_1 & \cdots & b_n/b_1\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}$$

となるため $\operatorname{rank} A = 1$. (それ以外の場合は必要に応じて行の入れ替えをする必要があったり, 主成分が第 2 列以降に現れることがあるが, 同様にできる)

【注】 $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_m\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}$ とおくと， $A = \boldsymbol{a}\,{}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{b}$ と表される． $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ のとき $\boldsymbol{a}$ の簡約行列は $\begin{bmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{bmatrix}$ ($\operatorname{rank}\boldsymbol{a} = 1$) で， $\boxed{4}$ より行列 M (基本行列の積) が存在して $M\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{bmatrix}$ が成り立つ．この M について，

$MA = M\boldsymbol{a}\,{}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{bmatrix}{}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix}{}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{0}\\ \vdots\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}$ (ここで $\boldsymbol{0}$ は行の零ベクトル) となるが, これは $\boldsymbol{a}$ を簡約化するときの行基本変形 (の繰り返し) を A に施すことで, 第 2 行以降がすべて 0 である行列に変形できることを意味している．よって $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ のとき $\operatorname{rank} A = 1$. (同様の考察により一般の行列 B, C に対し $\operatorname{rank} BC \leq \operatorname{rank} B$ が導かれる.)