数学演習第一 (演習 第 6 回) 線形 : 連立 1 次方程式 ［解答例］　2016 年 6 月 15 日 実施

$\boxed{1}$ 拡大係数行列を行基本変形の繰り返し (掃き出し法) により簡約行列まで変形して, 連立 1 次方程式の解を求める.

8.2.9 (1)

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 21 \\ 1 & 2 & 1 & 14 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{①}\leftrightarrow\text{②}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 14 \\ 2 & 3 & 2 & 21 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{②}-\text{①}\times 2 \\ \text{③}+\text{①}}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 14 \\ 0 & -1 & 0 & -7 \\ 0 & 3 & 2 & 15 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\text{②}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & 2 & 15 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{\text{①}-\text{②}\times 2 \\ \text{③}-\text{②}\times 3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{③}\times\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{①}-\text{③}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

よって, $x = 3,\ y = 7,\ z = -3.$

8.2.9 (3)

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & -12 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & -15 \\ 3 & -1 & -1 & -1 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\text{①}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 12 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & -15 \\ 3 & -1 & -1 & -1 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{②}-\text{①}\times 2 \\ \text{③}-\text{①} \\ \text{④}-\text{①}\times 3}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & -21 \\ 0 & 4 & 2 & -3 & -27 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & -24 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{\text{①}+\text{②} \\ \text{③}-\text{②}\times 4 \\ \text{④}-\text{②}\times 2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 & -9 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & -21 \\ 0 & 0 & -10 & 9 & 57 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 18 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{④}\times(-\frac{1}{4})\leftrightarrow\text{③}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 & -9 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & -21 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{9}{2} \\ 0 & 0 & -10 & 9 & 57 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{\text{①}-\text{③}\times 2 \\ \text{②}-\text{③}\times 3 \\ \text{④}+\text{③}\times 10}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{15}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{④}\times\frac{1}{4}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{15}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{①}+\text{④} \\ \text{②}+\text{④}\times\frac{3}{2} \\ \text{③}+\text{④}\times\frac{1}{2}}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

よって, $x_1 = 3,\ x_2 = -3,\ x_3 = -3,\ x_4 = 3.$

8.2.10 (1)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 13 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{②}-\text{①}\times 2 \\ \text{③}-\text{①}}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 13 \\ 0 & 1 & 5 & -22 \\ 0 & 1 & 5 & -22 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{①}-\text{②} \\ \text{③}-\text{②}}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -8 & 35 \\ 0 & 1 & 5 & -22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

主成分に対応しない未知数 x_3 を任意定数 c として, 解は $x_1 = 35 + 8c,\ x_2 = -22 - 5c,\ x_3 = c.$

8.2.10 (2)

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 3 \\ -2 & 4 & 6 & -6 \\ -1 & 2 & 3 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{②}+\text{①}\times 2 \\ \text{③}+\text{①}}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

主成分に対応しない未知数 x_2, x_3 をそれぞれ c_1, c_2 として, 解は $x_1 = 3 + 2c_1 + 3c_2,\ x_2 = c_1,\ x_3 = c_2.$

8.2.10 (3)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 13 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{②}-\text{①}\times 2 \\ \text{③}-\text{①}}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 13 \\ 0 & 1 & 5 & -24 \\ 0 & 1 & 5 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{③}-\text{②}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 13 \\ 0 & 1 & 5 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 18 \end{bmatrix}.$$

よって, (係数行列の階数) $\neq$ (拡大係数行列の階数) なので, 解なし.

$\boxed{2}$ (1)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & 1 \\ 2 & 4 & a^2 & a \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{②}-\text{①} \\ \text{③}-\text{①}\times 2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 1 \\ 0 & 2 & a^2-2 & a \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{①}-\text{②} \\ \text{③}-\text{②}\times 2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a+2 & -1 \\ 0 & 1 & a-1 & 1 \\ 0 & 0 & a^2-2a & a-2 \end{bmatrix}.$$

$(3,3)$ 成分 $a^2 - 2a = a(a-2)$ が 0 になるか否かで場合分けを行う.

- $a = 0$ のとき, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ より, 係数行列の階数は 2, 拡大係数行列の階数は 3.
- $a = 2$ のとき, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, 係数行列, 拡大係数行列ともに階数は 2.
- $a \neq 0, 2$ のとき, 係数行列, 拡大係数行列ともに階数は 3.

(2) (i) 解がただ 1 つなのは, $a \neq 0, 2$ のときで,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -a+2 & -1 \\ 0 & 1 & a-1 & 1 \\ 0 & 0 & a^2-2a & a-2 \end{bmatrix} \xrightarrow{③\times\frac{1}{a^2-2a}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a+2 & -1 \\ 0 & 1 & a-1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a} \end{bmatrix} \xrightarrow[②+③\times(-a+1)]{①+③\times(a-2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2/a \\ 0 & 1 & 0 & 1/a \\ 0 & 0 & 1 & 1/a \end{bmatrix}$$

より, $x = -\dfrac{2}{a},\ y = \dfrac{1}{a},\ z = \dfrac{1}{a}$.

(ii) 解が無数にあるのは, $a = 2$ のときで, その解は c を任意定数として, $x = -1,\ y = 1 - c,\ z = c$.

(iii) $a = 0$ のとき, $2 =$ (係数行列の階数) $<$ (拡大係数行列の階数) $= 3$ なので解なし.

$\boxed{3}$ 2 次曲線 $y = ax^2 + bx + c$ が与えられた 4 点を通るための必要十分条件は, a, b, c が

$$\begin{cases} 4a - 2b + c = -2 \\ \ \ a - \ \ b + c = -1 \\ 4a + 2b + c = \ \ 8 \\ 9a + 3b + c = \ \ 9 \end{cases}$$

を満たすことである. この連立 1 次方程式の拡大係数行列に行基本変形を繰り返して,

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 & 8 \\ 9 & 3 & 1 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{①\leftrightarrow②} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 & 8 \\ 9 & 3 & 1 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{②-①\times4 \\ ③-①\times4 \\ ④-①\times9}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 6 & -3 & 12 \\ 0 & 12 & -8 & 18 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{③\times\frac{1}{3} \\ ④\times\frac{1}{2}}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 6 & -4 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{③-② \\ ④-②\times3}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{③\times\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{④-③\times5} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

よって, この連立 1 次方程式の解はないので, 与えられた 4 点を通る 2 次曲線は存在しない.

$\boxed{4}$ (1) $x = y = z = 0$ 以外の解を持つための必要十分条件は, 係数行列の階数が 3 より小さくなることである.

$$\begin{bmatrix} -k & 1 & 1 \\ 1 & -k & 1 \\ 1 & 1 & -k \end{bmatrix} \xrightarrow{①\leftrightarrow③} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -k \\ 1 & -k & 1 \\ -k & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{②-① \\ ③+①\times k}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -k \\ 0 & -k-1 & k+1 \\ 0 & k+1 & -k^2+1 \end{bmatrix}$$

$(2,2)$ 成分 $-k-1$ が 0 になるか否かで場合分けを行う.

- $k = -1$ のとき, $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
- $k \neq -1$ のとき, $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -k \\ 0 & -k-1 & k+1 \\ 0 & k+1 & -k^2+1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{②\times\frac{1}{-k-1} \\ ③\times\frac{1}{k+1}}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -k \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -k+1 \end{bmatrix} \xrightarrow{③-②} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -k \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -k+2 \end{bmatrix}$.

以上より, $k = -1$ のとき階数 1, $k = 2$ のとき階数 2 となり, これら二つが求める k の値である.

(2) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ とおけば, $y + z = \lambda x,\ x + z = \lambda y,\ x + y = \lambda z$ であるから, (1) の同次連立 1 次方程式に帰着される. (1) の結果より, $\lambda = 2$ で, $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{①-②} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, $x = y = z \neq 0$ であればよい.

$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ などがその例である.