数学演習第一（演習第７回）【解答例】

微積： 高次の導関数, テーラーの定理, 有限テーラー展開　　2016 年 6 月 29 日

1

(1) $\{g(f(x))\}' = g'(f(x))f'(x)$ (合成関数の微分公式) の微分に, 積・合成関数の微分公式を適用して,

$$\begin{aligned}\{g(f(x))\}'' &= \{g'(f(x)) \cdot f'(x)\}' = \{g'(f(x))\}' \cdot f'(x) + g'(f(x)) \cdot f''(x) \\ &= g''(f(x))f'(x) \cdot f'(x) + g'(f(x))f''(x) = g''(f(x))\,f'(x)^2 + g'(f(x))f''(x).\end{aligned}$$

変数の関係 (z は y の関数, y は x の関数, 合成して z は x の関数) で上の計算を表現すれば, $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{dz}{dy}\dfrac{dy}{dx}$ から出発して,

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d}{dx}\Big(\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}\Big) = \frac{d}{dx}\Big(\frac{dz}{dy}\Big)\frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dy}\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2z}{dy^2}\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dy}\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2z}{dy^2}\Big(\frac{dy}{dx}\Big)^2 + \frac{dz}{dy}\frac{d^2y}{dx^2}.$$

(2) 導関数の計算まで含めて説明する．まず, 仮定により $t = \varphi^{-1}(x)$ であるから $y = \psi(\varphi^{-1}(x))$ と書ける．よって, y を x で微分すれば, 合成関数・逆関数の微分公式を用いて,

$$y' = \{\psi(\varphi^{-1}(x))\}' = \psi'(\varphi^{-1}(x))\{\varphi^{-1}(x)\}' = \psi'(\varphi^{-1}(x)) \cdot \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = \frac{\psi'(\varphi^{-1}(x))}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))}.$$

すなわち $\Big(\dfrac{dy}{dx}\Big)_{x=\varphi(t)} = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ が成り立つ．次に, $\omega(t) = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ とおけば, $y' = \omega(\varphi^{-1}(x))$ と書けるから, 上と同じ論法で $y'' = \{\omega(\varphi^{-1}(x))\}' = \dfrac{\omega'(\varphi^{-1}(x))}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))}$．ここで, $\omega'(t) = \dfrac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'(t)^2}$ より,

$$\Big(\frac{d^2y}{dx^2}\Big)_{x=\varphi(t)} = \frac{\omega'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'(t)^3}.$$

変数の関係 (y は t の関数, t は x の関数 ($=$ [x は t の関数] の逆関数), 合成して y は x の関数) で上の計算を表現すれば,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right) = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\big(\frac{dx}{dt}\big)^3}.$$

2

$n \geqslant 1$ とする. (実は, 得られる式は (2), (3) を除いて $n = 0$ でも正しい.)

(1) $y' = f'(ax+b)\cdot\{ax+b\}' = af'(ax+b)$. これを繰り返して, $y^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax+b)$.

(2) $\{\cos x\}^{(n)} = \cos\big(x + \frac{n\pi}{2}\big)$ より, $y^{(n)} = \Big\{\dfrac{1}{2}(1+\cos 2x)\Big\}^{(n)} = \dfrac{1}{2}\{\cos 2x\}^{(n)} = 2^{n-1}\cos\big(2x + \frac{n\pi}{2}\big)$.

(3) $\{\log x\}^{(n)} \Big(= \Big\{\dfrac{1}{x}\Big\}^{(n-1)}\Big) = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$ より, $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(2-3x)^n}\cdot(-3)^n = -\dfrac{3^n(n-1)!}{(2-3x)^n}$.

(4) $y = (1+x)^{-\frac{1}{2}}$ より, $y^{(n)} = \Big(-\dfrac{1}{2}\Big)\Big(-\dfrac{1}{2}-1\Big)\cdots\Big(-\dfrac{1}{2}-(n-1)\Big)(1+x)^{-\frac{1}{2}-n}$. ここで,

$$\Big(-\frac{1}{2}\Big)\Big(-\frac{1}{2}-1\Big)\cdots\Big(-\frac{1}{2}-(n-1)\Big) = \Big(-\frac{1}{2}\Big)\Big(-\frac{3}{2}\Big)\cdots\Big(-\frac{2n-1}{2}\Big) = \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n}$$ より, $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n(1+x)^{n+\frac{1}{2}}}$.

(5) $y = x^2e^{-2x}$ より, $y' = 2xe^{-2x} + x^2(-2e^{-2x}) = -2(x^2-x)e^{-2x}$. $n \geqslant 2$ のときは Leibniz（ライプニッツ）の公式を用いて,

$$\begin{aligned}y^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\{x^2\}^{(k)}\{e^{-2x}\}^{(n-k)} = x^2\{e^{-2x}\}^{(n)} + n\cdot 2x\{e^{-2x}\}^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2}\cdot 2\{e^{-2x}\}^{(n-2)} \\ &= \big\{(-2)^nx^2 + 2n(-2)^{n-1}x + n(n-1)(-2)^{n-2}\big\}e^{-2x} = (-2)^n\Big\{x^2 - nx + \frac{1}{4}n(n-1)\Big\}e^{-2x}. \quad (n = 0, 1 \text{ でも正しい})\end{aligned}$$

(6) $y = e^{-x}\sin x$ より, $y' = e^{-x}(-\sin x + \cos x) = \sqrt{2}\,e^{-x}\Big(\dfrac{-1}{\sqrt{2}}\sin x + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x\Big) = \sqrt{2}\,e^{-x}\sin\big(x + \frac{3\pi}{4}\big)\ \Big(= -\sqrt{2}\,e^{-x}\sin\big(x - \frac{\pi}{4}\big)\Big)$. これを繰り返して, $y^{(n)} = (\sqrt{2}\,)^n e^{-x}\sin\big(x + \frac{3n\pi}{4}\big)\ \Big(= (-\sqrt{2}\,)^n e^{-x}\sin\big(x - \frac{n\pi}{4}\big)\Big)$. 勿論, Leibniz（ライプニッツ）の公式を用いた表現も可能: $y^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\{e^{-x}\}^{(n-k)}\{\sin x\}^{(k)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}e^{-x}\sin\big(x + \frac{k\pi}{2}\big)$.

(7) $\dfrac{1}{1-x-2x^2} = \dfrac{1}{(1+x)(1-2x)} = \dfrac{1}{3}\Big(\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{2}{1-2x}\Big)$ と部分分数分解し, $\Big\{\dfrac{1}{x}\Big\}^{(n)} = \dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$ を用いて,

$$y^{(n)} = \Big\{\frac{1}{1-x-2x^2}\Big\}^{(n)} = \frac{1}{3}\Big\{\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}} + \frac{2\cdot(-1)^n n!\cdot(-2)^n}{(1-2x)^{n+1}}\Big\} = \frac{n!}{3}\Big\{\frac{(-1)^n}{(1+x)^{n+1}} + \frac{2^{n+1}}{(1-2x)^{n+1}}\Big\}.$$

3

(1) $f(x) = e^x$ より $f^{(n)}(x) = e^x$, $f^{(n)}(0) = 1$ $(n \geqslant 0)$. よって, $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1}\frac{x^n}{n!} + R_N(x)$, $R_N(x) = \dfrac{e^{\theta x}}{N!}x^N$ $(0 < \theta < 1)$.

特に, $N = 6$ なら, $e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^5}{5!} + R_6(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24} + \dfrac{x^5}{120} + R_6(x)$.

(2) $f(x) = \sin x$ より $f^{(n)}(x) = \sin\big(x + \frac{n\pi}{2}\big)$, $f^{(n)}(0) = \sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & (n = 2m) \\ (-1)^m & (n = 2m+1)\end{cases}$ $(n \geqslant 0)$. よって,

$$\sin x = \sum_{m=0}^{M-1}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}x^{2m+1} + R_{2M+1}(x), \quad R_{2M+1}(x) = \frac{(-1)^M\cos\theta x}{(2M+1)!}x^{2M+1}\ (0 < \theta < 1). \quad \text{(例題 3.8 解説参照)}$$

特に, $N = 6$ なら, $\sin x = \dfrac{x}{1!} - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + R_6(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + R_6(x)$.

(3) $f(x)=\cos x$ より $f^{(n)}(x)=\cos\bigl(x+\frac{n\pi}{2}\bigr)$, $f^{(n)}(0)=\cos\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}(-1)^m & (n=2m)\\ 0 & (n=2m+1)\end{cases}$ $(n\geqq 0)$. よって,

$$\cos x=\sum_{m=0}^{M-1}\frac{(-1)^m}{(2m)!}x^{2m}+R_{2M}(x),\quad R_{2M}(x)=\frac{(-1)^M\cos\theta x}{(2M)!}x^{2M}\ \ (0<\theta<1).$$

特に, $N=6$ なら, $\cos x=1-\frac{x}{2!}+\frac{x^3}{4!}+R_6(x)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+R_6(x)$.

(4) $f(x)=\frac{1}{1+x}$ より, $f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$ $(n\geqq 0)$. これより, $f^{(n)}(0)=(-1)^n n!$ $(n\geqq 0)$. よって, $x>-1$ に対して

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{N-1}(-1)^n x^n+R_N(x),\quad R_N(x)=\frac{(-x)^N}{(1+\theta x)^{N+1}}\ \ (0<\theta<1).$$

特に, $N=6$ なら, $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+R_6(x)$. 【注】等比数列の和の公式により $R_N(x)=\frac{(-x)^N}{1+x}$ が成立.

(5) $f(x)=\log(1+x)$ より, $f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$ $(n\geqq 1)$. これより, $f(0)=0$, $f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!$ $(n\geqq 1)$. よって, $x>-1$ に対して, $\log(1+x)=\sum_{n=1}^{N-1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+R_N(x)$, $R_N(x)=\frac{(-1)^{N-1}}{N(1+\theta x)^N}x^N$ $(0<\theta<1)$. 特に, $N=6$ なら, $\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+R_6(x)$.

(6) $\boxed{2}$ (4) の結果を用いて, $f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n(1+x)^{n+\frac{1}{2}}}$, $f^{(n)}(0)=\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n}$, $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}$ $(n\geqq 0)$. よって, $x>-1$ に対して, $\frac{1}{\sqrt{1+x}}=\sum_{n=0}^{N-1}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n+R_N(x)$, $R_N(x)=\frac{(2N-1)!!}{(2N)!!}\frac{(-x)^N}{(1+\theta x)^{N+\frac{1}{2}}}$ $(0<\theta<1)$. 特に, $N=6$ なら, $\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3+\frac{35}{128}x^4-\frac{63}{256}x^5+R_6(x)$.

【注】剰余項 $R_N(x)$ を評価することにより, (1) から (6) までの関数は無限級数に表示できることが分かる ((4) から (6) は範囲が制限される).

(1) $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, (2) $\sin x=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}x^{2m+1}$, (3) $\cos x=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m)!}x^{2m}$, (4) $\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ $(-1<x<1)$,

(5) $\log(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$ $(-1<x\leqq 1)$, (6) $\frac{1}{\sqrt{1+x}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n$ $(-1<x\leqq 1)$.

4

(1) $\{a^x\}^{(n)}=(\log a)^n a^x$ を用いて, $a^x=\sum_{n=0}^{N-1}\frac{(\log a)^n a}{n!}(x-1)^n+R_N(x)$, $R_N(x)=\frac{(\log a)^N a^{1+\theta(x-1)}}{N!}(x-1)^N$ $(0<\theta<1)$.

(2) $\{x^p\}^{(n)}=\frac{p!}{(n-p)!}x^{p-n}$ $(n\leqq p)$, $=0$ $(n>p)$ より, $x^p=\sum_{n=0}^{p}\binom{p}{n}(x-1)^n$. ($N$ 次剰余項は 0)

5

(1) 最初に $\{f(-x)\}^{(n)}=(-1)^n f^{(n)}(-x)=\pm f^{(n)}(-x)$ ($\pm$ は n が偶数なら $+$, 奇数なら $-$) に注意する.

- $f(x)$ が奇関数のとき: $f(-x)=-f(x)$ の両辺を $2m$ 回微分して, $f^{(2m)}(-x)=-f^{(2m)}(x)$. これより $f^{(2m)}(0)=-f^{(2m)}(0)$, すなわち $f^{(2m)}(0)=0$ が得られ, $a_{2m}=\frac{f^{(2m)}(0)}{(2m)!}=0$.
- $f(x)$ が偶関数のとき: $f(-x)=f(x)$ の両辺を $2m+1$ 回微分して, $-f^{(2m+1)}(-x)=f^{(2m+1)}(x)$. これより $-f^{(2m+1)}(0)=f^{(2m+1)}(0)$, すなわち $f^{(2m+1)}(0)=0$ が得られ, $a_{2m+1}=\frac{f^{(2m+1)}(0)}{(2m+1)!}=0$.

(2) ① $f(x)=\mathrm{Sin}^{-1}x$ より, $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, $f''(x)=-\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-2x)=x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$. これより, $(1-x^2)f''(x)=x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=xf'(x)$. ② 1 回微分すると $(1-x^2)f'''(x)-2xf''(x)=xf''(x)+f'(x)$. これを整理して, $(1-x^2)f'''(x)-3xf''(x)-f'(x)=0$. n 回 $(n\geqq 2)$ 微分すると Leibniz(ライプニッツ) の公式により $(1-x^2)f^{(n+2)}(x)+n\cdot(-2x)f^{(n+1)}(x)+\frac{n(n-1)}{2}\cdot(-2)f^{(n)}(x)=xf^{(n+1)}(x)+nf^{(n)}(x)$. これを整理して, $(1-x^2)f^{(n+2)}(x)-(2n+1)xf^{(n+1)}(x)-n^2f^{(n)}(x)=0$. よって, すべての $n\geqq 0$ に対して関係式が示された ($n=0$ のときは明らか). ③ $n=2m-1$ $(m\geqq 1)$ の場合の②の関係式に $x=0$ を代入して, $f^{(2m+1)}(0)=(2m-1)^2f^{(2m-1)}(0)$. この関係式を繰り返し用いて, $f^{(2m+1)}(0)=(2m-1)^2f^{(2m-1)}(0)=\cdots=(2m-1)^2\cdots 3^2\cdot 1^2 f'(0)=\{(2m-1)!!\}^2$ $(m\geqq 1)$. ここで, $f'(0)=1$ を用いた. $(-1)!!=1$ に注意すれば, $f^{(2m+1)}(0)=\{(2m-1)!!\}^2$ $(m\geqq 0)$. ④ $a_{2m+1}=\frac{f^{(2m+1)}(0)}{(2m+1)!}=\frac{\{(2m-1)!!\}^2}{(2m)!!\cdot(2m+1)!!}=\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\cdot\frac{1}{2m+1}$.

(3) ① $f(x)=\tan x$ より, $f'(x)=1+\tan^2 x=1+f(x)^2$. ② $n\geqq 1$ のとき $f'(x)=1+f(x)^2$ を n 回微分すると Leibniz の公式により $f^{(n+1)}(x)=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}f^{(n-j)}(x)f^{(j)}(x)$. $n=0$ のときは $f'(x)=1+f(x)^2$. ③ $f^{(2k)}(0)=0$ に注意して, $f^{(2m+1)}(0)=\sum_{j=0}^{2m}\binom{2m}{j}f^{(2m-j)}(0)f^{(j)}(0)=\sum_{k=0}^{m-1}\binom{2m}{2k+1}f^{(2m-2k-1)}(0)f^{(2k+1)}(0)$ $(m\geqq 1)$. ④ $a_{2m+1}=\frac{f^{(2m+1)}(0)}{(2m+1)!}=\frac{(2m)!}{(2m+1)!}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{f^{(2m-2k-1)}(0)f^{(2k+1)}(0)}{(2m-2k-1)!(2k+1)!}=\frac{1}{2m+1}\sum_{k=0}^{m-1}a_{2m-2k-1}a_{2k+1}$ $(m\geqq 1)$. ⑤ $a_1=f'(0)=1$ と④の関係式を用いて, $a_1=1$, $a_3=\frac{1}{3}a_1^2=\frac{1}{3}$, $a_5=\frac{1}{5}(a_3a_1+a_1a_3)=\frac{2}{15}$, $a_7=\frac{1}{7}(a_5a_1+a_3^2+a_1a_5)=\frac{17}{315}$.