数学演習第一（演習第７回）

微積：高次の導関数, テーラーの定理, 有限テーラー展開

2016 年 6 月 29 日

$\boxed{1}$ 2 次導関数に関して, 以下の問いに答えよ. 但し, 現れる関数はすべて 2 回微分可能であるとする.

(1) $y = f(x)$, $z = g(y)$ の合成関数 $z = g(f(x))$ の導関数は

$$\{g(f(x))\}' = g'(f(x))f'(x) \qquad \text{あるいは} \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$$

で与えられる. 2 次導関数をそれぞれに対応する形で求めよ. (微積教科書 問題 2.3–3)

(2) $\varphi'(t) \neq 0$ のとき, $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ により y は x の関数となり, 導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ が

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=\varphi(t)} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \qquad \text{あるいは} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

で与えられる. 2 次導関数をそれぞれに対応する形で求めよ.

$\boxed{2}$ 次の関数の n 次導関数を求めよ. (問題 3.2.5 類題)　まず, $e^x, \sin x, \cos x, x^\alpha$ (特に $1/x$), $\log x$ の場合を確認せよ.

(1) $y = f(ax+b)$ (f は C^∞ 級, a, b は定数で $a \neq 0$)　(2) $y = \cos^2 x$　(3) $y = \log(2-3x)$

(4) $y = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ (2 重階乗を用いて表せ) $\boxed{5}$ (2) 参照　(5) $y = x^2 e^{-2x}$　(6) $y = e^{-x}\sin x$　(7) $y = \dfrac{1}{1-x-2x^2}$

$\boxed{3}$ 次の各関数 $f(x)$ に対して, $f^{(n)}(0)$ を計算し, 有限 Maclaurin（マクローリン）展開

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_N(x), \quad R_N(x) = \frac{f^{(N)}(\theta x)}{N!}x^N \ \ \underset{\theta\ \text{は}\ N, x\ \text{に依存}}{(0 < {}^\exists\theta < 1)}$$

を書け ((2), (3) の N は指示の形). 更に, $N = 6$ の場合を具体的な数字を使って表せ ($R_6(x)$ の具体形は不要).

(1) $f(x) = e^x$　(2) $f(x) = \sin x$ $(N = 2M+1)$　(3) $f(x) = \cos x$ $(N = 2M)$

(4) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$　(5) $f(x) = \log(1+x)$　(6) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$　((4) から (6) は $x > -1$ の範囲で考える)

$\boxed{4}$ 2 つの関数 a^x, x^p $(a > 0, p \in \mathbb{N})$ に対して, $x = 1$ における有限 Taylor（テーラー）展開を N 次 $(N > p)$ の剰余項まで求めよ.

$\boxed{5}$ $f(x)$ が 0 を含む開区間 I で C^∞ 級のとき, 任意の自然数 N に対して $f(x)$ は $\boxed{3}$ で述べた形の有限 Maclaurin 展開をもつ. そこに現れる x^n の係数 $a_n := \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ について以下の問いに答えよ.

(1) $f(x)$ が奇関数 (すなわち $f(-x) = -f(x)$) のとき $a_{2m} = 0$ となることを示せ. また, $f(x)$ が偶関数 (すなわち $f(-x) = f(x)$) のとき $a_{2m+1} = 0$ となることを示せ.

以下の関数 $f(x)$ は両方とも奇関数なので $f^{(2m)}(0) = a_{2m} = 0$ $(m \geqslant 0)$ が成り立つことに注意する.

(2) $f(x) = \mathrm{Sin}^{-1}x$ のとき, ① $(1-x^2)f''(x) = xf'(x)$ を示せ. ② 前式の両辺を n 回微分して次式を示せ:

$$(1-x^2)f^{(n+2)}(x) - (2n+1)xf^{(n+1)}(x) - n^2 f^{(n)}(x) = 0 \quad (n \geqslant 0).$$

③ $f^{(2m+1)}(0) = \{(2m-1)!!\}^2$ $(m \geqslant 0)$ を示せ. ④ a_{2m+1} $(m \geqslant 0)$ を求めよ. なお, $n!!$ は

$$n!! = \begin{cases} 1\cdot 3\cdots n \ \ (n\ \text{以下の奇数の積}) & \text{if } n \geqslant 1 : \text{奇数} \\ 2\cdot 4\cdots n \ \ (n\ \text{以下の偶数の積}) & \text{if } n \geqslant 2 : \text{偶数} \end{cases} \qquad \text{および} \quad (-1)!! = 0!! = 1$$

で定義される (n の 2 重階乗). 従って, 例えば $n! = (n-1)!! \cdot n!!$, $(2n)!! = 2^n n!$ $(n \geqslant 0)$ が成り立つ.

(3) $f(x) = \tan x$ のとき, ① $f'(x) = 1 + f(x)^2$ を確認せよ. ② 前式の両辺を n 回微分して $f^{(n+1)}(x)$ を $f^{(j)}(x)$ $(0 \leqslant j \leqslant n)$ で表せ. ③ $f^{(2m+1)}(0)$ を $f^{(2k+1)}(0)$ $(0 \leqslant k \leqslant m-1)$ で表せ. ④ a_{2m+1} を a_{2k+1} $(0 \leqslant k \leqslant m-1)$ で表せ. ⑤ a_1, a_3, a_5, a_7 を求めよ.