数学演習第一（演習第８回）　【解答例】

微積： 正則行列, 逆行列, 2 次または 3 次の行列式　　2016 年 7 月 6 日

1

(1) A が正則と仮定すれば, 仮定 $AB = O$ $(B \neq O)$ より, $B = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) = A^{-1}O = O$ が導かれ, 矛盾を生じる.

(2) $AB = cE$ $(c \neq 0)$ を c で割って，$A(c^{-1}B) = E$ が成り立つから, A の逆行列 $A^{-1} = c^{-1}B$ が得られる.

(3) まず, 容易に $A\widetilde{A} = (ad - bc)E$. 次に, $ad - bc = 0$ のとき A は零因子であることを示す. $A \neq O$ ならば $\widetilde{A} \neq O$ かつ $A\widetilde{A} = O$ であるから, A は零因子. また $A = O$ ならば例えば $OE = O$ であるからやはり零因子. よって, (1) の結果により $ad - bc = 0$ のとき A は正則でない. 最後に, $ad - bc \neq 0$ のとき, (2) の結果により, A の逆行列 $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\widetilde{A}$ が得られる (A は正則). 以上が証明すべきことであった

2

2 次正方行列の逆行列の計算には公式を用いるのがよい.

(1) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{10-12}\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & 2 \\ \frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix}$.

(2) $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{-\cos^2\theta - \sin^2\theta}\begin{bmatrix} -\cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$.

以下では, 行基本変形が何回か繰り返されていることを $\dashrightarrow$ で表した.

($\boxed{P_i(c)}$, $\boxed{P_{ij}}$, $\boxed{P_{i_1j}(c_1)\cdots P_{i_kj}(c_k)}$ のいずれか 1 つにより得られる行基本変形を $\to$ で表すことが多いが, これらのいくつかの組み合わせを $\to$ で表すこともある. 紛らわしいので, ここでは記号 $\dashrightarrow$ を導入して区別した.)

(3)
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \dashrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right] \text{ より, 逆行列は } \begin{bmatrix} -3 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(4)
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \text{ より正則でない.}$$

(5)
$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \dashrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -3 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & -6 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\dashrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 4 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dashrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & -\frac{5}{2} & 2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$
$$\to \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{6} \end{array}\right] \text{ より, 逆行列は } \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & -3 & 6 & -3 \\ -3 & 6 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 12 = -2.$　　(2) $\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ -1 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-4) + 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda-2)(\lambda-3).$

(3) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 2 - (-2) - 18 = -5.$　　(4) $\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ c & b & \lambda + a \end{vmatrix} = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c.$

(5) $\begin{vmatrix} \lambda & 2 & -2 \\ 2 & \lambda - 3 & -5 \\ 0 & 0 & \lambda - 8 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-3)(\lambda-8) - 4(\lambda-8) = (\lambda^2 - 3\lambda - 4)(\lambda - 8) = (\lambda+1)(\lambda-4)(\lambda-8).$

(6) $|R| = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r,\qquad |S| = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$

$$= r^2\cos^2\theta\sin\theta\cos^2\varphi + r^2\sin^3\theta\sin^2\varphi - (-r^2\sin^3\theta\cos^2\varphi) - (-r^2\cos^2\theta\sin\theta\sin^2\varphi)$$
$$= r^2(\cos^2\theta\sin\theta + \sin^3\theta)\cos^2\varphi + r^2(\sin^3\theta + \cos^2\theta\sin\theta)\sin^2\varphi = r^2\sin\theta.$$

(行列式と基本変形の関係を知っていたら, まず, 第 2 列から r, 第 3 列から $r\sin\theta$ を括り出すのがよい.)

4 (1) $\left|\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\right| = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = -6$ より, 求める面積は $|-6| = 6$. (2) $\left|\boldsymbol{p}\ \ \boldsymbol{q}\ \ \boldsymbol{r}\right| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 2 & 0 & -4 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -4$ より, 求める体積は $|-4| = 4$. (3) $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ の外積は $\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -8 \end{bmatrix}$ より, 求める面積は $\|\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q}\| = \sqrt{16+4+64} = 2\sqrt{21}$.

5 【考え方 1】 行基本変形は基本行列を左から掛けることにより実現されるから, $[A\ \ B]$ を $[E\ \ C]$ まで変形するのに実行した行基本変形に対応する基本行列の積を P と表せば, $P[A\ \ B] = [E\ \ C]$ と書ける. よって $PA = E$, $PB = C$ が成り立つので, 第 1 式から $P = A^{-1}$ (A は正則) が従い, これを第 2 式に代入して $C = A^{-1}B$ が得られる. 【考え方 2】 $[A\ \ B]$ が $[E\ \ C]$ まで行基本変形されたとき, A は E まで変形されるので正則. また, $B = [\boldsymbol{b}_1\ \ \boldsymbol{b}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{b}_n]$, $C = [\boldsymbol{c}_1\ \ \boldsymbol{c}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{c}_n]$ とすれば, $[A\ \ \boldsymbol{b}_i]$ が $[E\ \ \boldsymbol{c}_i]$ まで変形されるので $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_j$ の解は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}_j$ である $(j = 1, \ldots, n)$. まとめて考えれば, $AX = B$ の解が $X = C$ となるから, $C = A^{-1}B$ が成り立つ.

(1) $\left[A \,\middle|\, B\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \dashrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -3 & -3 \end{bmatrix}$

$$\dashrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -6 & -5 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right] = \left[E \,\middle|\, A^{-1}B\right]. \qquad \therefore\ X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -6 & -5 & -4 \\ -2 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

(2) $YA = B$ の転置をとって, $YA = B$ と同値な行列方程式 ${}^{t}\!A\,{}^{t}Y = {}^{t}B$ を得る.

$$\left[{}^{t}\!A \,\middle|\, {}^{t}B\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right] \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 5 & -1 \end{bmatrix} \dashrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -9 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\dashrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 8 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 9 & -3 \end{array}\right] = \left[E \,\middle|\, ({}^{t}\!A)^{-1}\,{}^{t}B\right] = \left[E \,\middle|\, {}^{t}(BA^{-1})\right]. \quad \therefore\ Y = BA^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 8 & -4 & 9 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

【注】列基本変形を用いれば, $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \dashrightarrow \begin{bmatrix} E \\ BA^{-1} \end{bmatrix}$ となる (上の計算を転置して実行することに他ならない).

6 (1) $A = \left[\boldsymbol{a}_1\ \ \boldsymbol{a}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{a}_n\right]$ とすれば, ${}^{t}\!AA$ の (i,j) 成分は $\boldsymbol{a}_i\cdot\boldsymbol{a}_j$ で与えられる. よって, A が直交行列であることを示すには A の異なる 2 つの列が直交し, かつ各列が長さ (ノルム) 1 であることを確かめればよい. 与えられた行列 P, Q はともにその性質をもっている (計算省略) ので直交行列である. 従って,

$$P^{-1} = {}^{t}P = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad Q^{-1} = {}^{t}Q = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{bmatrix}.$$

(2) A, B がサイズの等しい正則行列なら, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ が成り立つ. これとヒントを用いて,

$$R^{-1} = \left(P\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\dfrac{\sin\theta}{r} & \dfrac{\cos\theta}{r} \end{bmatrix},$$

$$S^{-1} = \left(Q\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r\sin\theta \end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r\sin\theta} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \dfrac{\cos\theta\cos\varphi}{r} & \dfrac{\cos\theta\sin\varphi}{r} & -\dfrac{\sin\theta}{r} \\ -\dfrac{\sin\varphi}{r\sin\theta} & \dfrac{\cos\varphi}{r\sin\theta} & 0 \end{bmatrix}.$$

【注】R, S はそれぞれ平面, 空間における極座標変換 (極座標から直交座標への座標変換) に関するヤコビ行列である.