数学演習第一（演習第８回）

線形： 正則行列, 逆行列, 2 次または 3 次の行列式

2016 年 7 月 6 日

【注意】正方行列 A に対して, $AB = BA = E$ (E は単位行列) を満たす行列 B が存在するとき, B を A の逆行列といい, 逆行列をもつ行列を正則行列と呼ぶ. 同じサイズの正方行列 A, B が $AB = E$ (E は単位行列) を満たせば, 実は, A, B はともに正則であって, 互いに他の逆行列になっている (線形教科書 系 9.2). 以下ではこの事実を認める.

1 正方行列 A に対して, 以下の問いに答えよ.

(1) A が零因子 ($AB = O$ なる正方行列 $B \neq O$ が存在) なら, A は正則でないことを示せ (線形教科書 問 4.11).

(2) $AB = cE$ となる行列 B と数 $c \neq 0$ が存在するなら, A は正則であることを示せ (逆行列を求めよ).

(3) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ に対して, $\widetilde{A} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ とおき, $A\widetilde{A}$ を計算せよ. 更に, これと (1), (2) の結果を用いて, A が正則であるための必要十分条件は $\boxed{ad - bc \neq 0}$ であり, 逆行列は $A^{-1} = \boxed{\dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}$ で与えられることを示せ.

2 次の行列について, 正則ならば逆行列を求めよ. (2 次正方行列に対しては上記の公式を用いるのが効率的.)

(1) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

3 次の行列式を計算せよ (線形教科書 例 10.2 を確認). なお, (2), (5) については因数分解された形で答えよ.

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 \\ -1 & \lambda-4 \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ (4) $\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ c & b & \lambda+a \end{vmatrix}$ (5) $\begin{vmatrix} \lambda & 2 & -2 \\ 2 & \lambda-3 & -5 \\ 0 & 0 & \lambda-8 \end{vmatrix}$

(6) $\boxed{6}$ (2) の R, S の行列式

4 平面ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix}$ および空間ベクトル $\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$ に対して, 次の面積, 体積を計算せよ. (線形教科書 pp.85–86「行列式の幾何学的意味」と pp.8–9「空間ベクトルの外積」参照)

(1) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の張る平行四辺形の面積. (2) $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}$ の張る平行六面体の体積. (3) $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ の張る平行四辺形の面積.

5 m 次正方行列 A, $m \times n$ 行列 B に対して, $m \times (m+n)$ 行列 $\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$ に行基本変形を繰り返して $\begin{bmatrix} E & C \end{bmatrix}$ まで変形できたならば, A は正則行列であり, $C = A^{-1}B$ が成り立つ. この理由を説明せよ. また, この事実を用いて, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ に対して次の行列方程式を解け.

(1) $AX = B$ (2) $YA = B$ (ヒント：転置を考えよ)

6 正方行列 A が ${}^t\!AA = E$ を満たすとき, A を直交行列と呼ぶ. このとき, A の逆行列が $A^{-1} = {}^t\!A$ で与えられる.

(1) $P = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix}$ が直交行列であることを確かめ, 逆行列を求めよ. ［ヒント］$A = [\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n]$ のとき, ${}^t\!AA$ の (i,j) 成分は $\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_j$ ($\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j$ の内積) で与えられる.

(2) $r\sin\theta \neq 0$ のとき, $R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}$, $S = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{bmatrix}$ の逆行列を求めよ. ［ヒント］R, S は (1) の行列 P, Q にそれぞれ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r\sin\theta \end{bmatrix}$ を右から掛けて得られる.